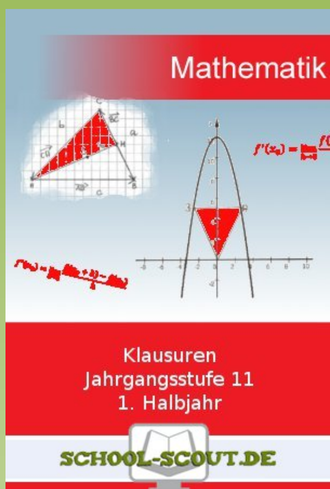
Unterrichtsmaterialien in digitaler und in gedruckter Form

Auszug aus:

Klausuren Jahrgangsstufe 11, 1. Halbjahr

Das komplette Material finden Sie hier:

School-Scout.de



Unsere erste Aufgabe ist es, aus den drei Gleichungen mit drei Unbekannten insgesamt 2 Gleichungen mit zwei Unbekannten zu schaffen. Dies erreichen wir, indem wir Gleichung 1 und 3 voneinander subtrahieren:

$$4 = 1 - 3: \quad -9a - 6b = 9$$

Das System

$$4: \quad -9a - 6b = 9$$

$$2: \quad 12a + 2b = 0$$

können wir lösen, indem wir zu Gleichung 4 das dreifache von Gleichung 2 addieren, dann fällt nämlich der Parameter b heraus:

$$4: \qquad -9a - 6b = 9$$

$$+3 \cdot 2: \ 36a + 6b = 0$$

$$\Rightarrow \ 27a = 9 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{1}{3}$$

Da wir nun den Parameter $a = \frac{1}{3}$ kennen, können wir dies nutzen, um mit Hilfe von Gleichung 2 den Parameter b zu bestimmen. Wir setzen in Gleichung 2 ein:

$$12a + 2b = 0 \quad \Rightarrow \quad 12 \cdot \frac{1}{3} + 2b = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4 + 2b = 0 \quad \Leftrightarrow \quad b = -2$$

Um die letzte Unbekannte c zu bestimmen, setzen wir die Größen $a = \frac{1}{3}$ und $b = -2$ in eine der beiden Gleichungen 1 oder 3 ein. Wir nehmen hier exemplarisch Gleichung 1:

$$3a - 2b + c = 0 \ \Rightarrow \ 3 \cdot \frac{1}{3} - 2 \cdot (-2) + c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 + 4 + c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad c = -5$$

Damit haben wir alle Unbekannten bestimmt:

$$a = \frac{1}{3}, \quad b = -2, \quad c = -5, \qquad d = 0$$

Die gesuchte ganzrationale Funktion dritten Gerades, die die geforderten Eigenschaften besitzt, hat damit die Funktionsgleichung

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 5x.$$

Aufgabe 3

a) Auf Grund der Tatsache, dass die Parabel achsensymmetrisch zur yAchse verläuft und das Dreieck gleichschenklig sein soll, müssen die die x-Werte des Punktes $x = u$ und $x = -u$ lauten mit unbekanntem u, wobei für den Parameter gelten muss, dass er zwischen den Nullstellen der Funktion liegen muss.

Der Punkt A hätte dann die allgemeinen Koordinaten

$$A = \left(u; f(u)\right) = (u;\ -u^2 + 12)$$

und der Punkt B analog

$$B = \left(-u; f(-u)\right) = (-u;\ -u^2 + 12)$$

Der Flächeninhalt eines Dreiecks ist bekanntlich

A = ½ Grundseite x Höhe,

wobei die Grundseite die Länge

$$g = u - (-u) = 2u$$

besitzt und die Höhe h gerade der Funktionswert $f(u) = f(-u)$ ist:

$$h = f(u) = -u^2 + 12.$$

Damit können wir den Flächeninhalt des Dreiecks als Funktion des Parameters u aufstellen:

$$A(u) = \frac{1}{2} \cdot 2u \cdot (-u^2 + 12) = -u^3 + 12u; \quad u > 0$$

b) Um den extremalen Flächeninhalt $A_{\max}$ zu bestimmen, müssen wir das Maximum der Funktion $A(u)$ berechnen.

Hierzu stellen wir zunächst die ersten beiden Ableitungsfunktionen zusammen:

$$A'(u) = -3u^2 + 12$$

$$A''(u) = -6u$$

Notwendige Bedingung: $A'(u) = 0 \iff -3u^2 + 12 = 0 \iff u^2 = 4 \iff$

$$u_1 = 2 \lor [u_2 = -2]$$

E-Mail: info@School-Scout.de ⬩ Internet: http://www.School-Scout.de ⬩ Fax: 02501/26048
Linckensstr. 187 ⬩ 48165 Münster

Hinreichende Bedingung: $A''(u) \neq 0$. Wir setzen die potentielle Extremstelle $u_1 = 2$ ein:

$$A''(2) = -12 < 0 \quad \Rightarrow \quad Maximum$$

Wir erhalten somit mit der Lösung $u_1 = 2$ einen maximalen Flächeninhalt von

$$A_{Max} = A(2) = 16\ FE$$

Die Dreieckspunkte sind demnach $A = (u; -u^2 + 12) \quad \Rightarrow \quad A = (2; 8)$ sowie

$B = (-u; -u^2 + 12) \;\Rightarrow\; B = (-2; 8)$.

Klausur Nr. 3

Lineare Algebra und Analytische Geometrie

Name:……………………………………..

Aufgabe 1

Es seien Ihnen die Punkte $A = (1; 1)$, $B = (4; 1)$ und $C = (3; 3)$ vorgelegt.

a) Berechnen Sie die Vektoren $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ und $\overrightarrow{CA}$.

b) Die drei Punkte bilden im $\mathbb{R}^2$ ein Dreieck. Zeichnen Sie dieses Dreieck in ein Koordinatensystem und kennzeichnen Sie die oben berechneten Vektoren.

c) Berechnen Sie die Länge der Seitenhalbierenden der Seite a des Dreiecks.

d) In welchem Verhältnis teilt der Punkt $S = \left(\frac{8}{3}; \frac{5}{3}\right)$ die Seitenhalbierende?

e) Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes D so (rechnerisch!), dass die Punkte $ABCD$ in dieser Reihenfolge ein Parallelogramm bilden!

Aufgabe 2

Im $\mathbb{R}^3$ seien Ihnen die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ gegeben.

a) Zeigen Sie, dass die drei Vektoren linear unabhängig sind.

b) Stellen Sie den Vektor $\vec{d} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$ als Linearkombination der obigen drei Vektoren dar.

Aufgabe 3

Gegeben ist die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) Zeigen Sie, dass der Punkt $P = (-3; 2; 5)$ nicht auf der Geraden liegt.

b) Geben Sie eine zu g parallel verlaufende Gerade h an, die durch den Punkt P geht.

E-Mail: info@School-Scout.de ⬩ Internet: http://www.School-Scout.de ⬩ Fax: 02501/26048

Linckensstr. 187 ⬩ 48165 Münster

c) Gegeben sei ferner die Gerade $i: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -9 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$. Untersuchen Sie die Lagebeziehung zur Geraden g und geben Sie gegebenenfalls die Koordinaten des Schnittpunktes an!

d) Die beiden Geraden g und i spannen eine Ebene E auf. Geben Sie eine Gleichung dieser Ebenen an!

e) Bestimmen Sie, in welchem Punkt die Ebene die x_1-Achse schneidet.

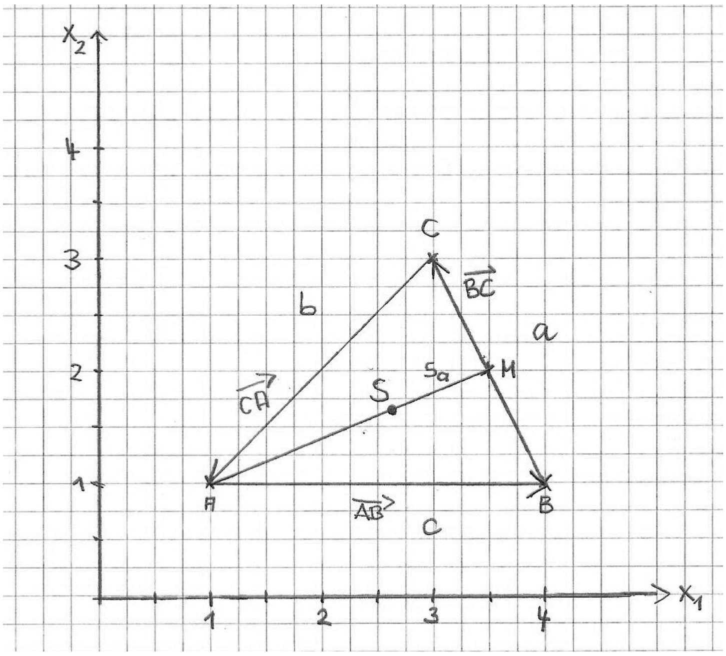
Musterlösung zur Klausur Nr. 3

Aufgabe 1

a) Wir berechnen: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 4-1 \\ 1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$. Analog erhalten wir:

$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 3-4 \\ 3-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ sowie $\overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} 1-3 \\ 1-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$.

b)



c) Die Seitenhalbierende der Seite a verläuft vom Punkt A bis zum Mittelpunkt der Seite a (vergleichen Sie hierzu die Skizze). Wir benötigen folglich zunächst den Mittelpunkt M der Strecke BC:

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2} \cdot \left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right) = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 4+3 \\ 1+3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3{,}5 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow M = (3{,}5; 2)$$

Die Länge der Seitenhalbierenden ist dann genau der Betrag des Vektors $\overrightarrow{AM}$:

$$\overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} 3{,}5-1 \\ 2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2{,}5 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left|\overrightarrow{AM}\right| = \sqrt{2{,}5^2 + 1^2} = \sqrt{7{,}25} \approx 2{,}69\ LE$$

d) Der Punkt S teilt die Strecke AM in einem zu bestimmenden Verhältnis. Es muss folglich gelten:

$$\overrightarrow{AS} = t \cdot \overrightarrow{AM},$$