



SCHOOL-SCOUT.DE

Unterrichtsmaterialien in digitaler und in gedruckter Form

Auszug aus:

*Bruchgleichungen: Diagnosematerial, Übungsmaterial und
Vertiefungsmaterial*

Das komplette Material finden Sie hier:

School-Scout.de



Vorüberlegungen

Ziele und Inhalte:

- Die Schüler lernen, die Lösungsmenge einer Bruchgleichung sicher und zügig zu bestimmen.
- Sie erhalten dabei Gelegenheiten, Gleichungslehre zu vertiefen. Dabei lernen sie die Definitionsmenge einer Gleichung kennen und sie verstehen ihre Bedeutung.
- Sie erfahren, dass im Allgemeinen zwar mehrere Lösungswege zum Ziel führen, ein geschickter Ansatz den Rechenaufwand aber beträchtlich reduzieren kann.

Alles sollte so einfach wie möglich gemacht werden, aber nicht einfacher.

Albert Einstein

Zentrales Anliegen:

Bruchgleichungen sind nicht nur ein wichtiger, sondern auch ein unverzichtbarer Baustein, wenn Gleichungslehre so gelehrt werden soll, dass **Verständnis** ermöglicht wird. Bei der Bestimmung der Lösungsmenge einer Gleichung spielen Äquivalenzumformungen die wesentliche Rolle – es sind dies Umformungen, welche die Lösungsmenge nicht verändern. Eine vorgegebene Gleichung wird mit Äquivalenzumformungen so lange umgeformt, bis aus der neuen Gleichung die Lösungsmenge einfach oder sogar unmittelbar abgelesen werden kann. Dazu muss natürlich geklärt werden, welche Manipulationen Äquivalenzumformungen sind. Bei einem ersten Kontakt mit einfachsten Gleichungen mag es vorläufig genügen, wenn vage festgehalten wird, „dass auf beiden Seiten der Gleichung das Gleiche“ zu geschehen habe. Dabei wird gelegentlich zur ersten Einführung eine Waage als nützliche Analogie und Merkhilfe herangezogen, das gibt allerdings keinesfalls eine angemessene Begründung ab. Ungenaue Formulierungen und nur eingeschränkt gültige Analogien können dann gerade bei Bruchgleichungen zu Fehlern führen, die undurchschaubar sind, wenn die Sonderrolle der Null nicht beachtet wird.

Schüler sollen ja im Unterricht nach und nach behutsam in die Gleichungslehre eingeführt werden, nur mit dem Grad von Strenge, der für das Verständnis unbedingt erforderlich ist. Auf diesem Weg können Bruchgleichungen ein nützlicher Baustein sein, denn hier können Schüler zum ersten Mal erfahren, wie eine Belegung der Variablen mit einem Element der Grundmenge zu einem undefinierten Term führt.

Einordnung:

Zur Einführung in die Gleichungslehre werden Gleichungen behandelt, die zu linearen Gleichungen $ax + b = c$ äquivalent sind. Ohne besondere Probleme können danach quadratische Gleichungen bearbeitet werden. Die Gleichungslehre muss aber vertieft werden, wenn in den Gleichungen undefinierte Terme auftreten können. Hier sind Bruchgleichungen besonders geeignet. Da Bruchgleichungen traditionell vor quadratischen Gleichungen behandelt werden, legen wir in den zur Einführung geeigneten Arbeitsblättern die Menge der rationalen Zahlen zugrunde.

Werden nur ganze Zahlen betrachtet, kann problemlos addiert, subtrahiert und multipliziert werden. Soll der Ring der ganzen Zahlen zum Körper der rationalen Zahlen erweitert werden, wird die Null unangenehm. Der Quotient $z : n$ bezeichnet nur dann eine rationale Zahl, wenn n von Null verschieden ist.

1.17 Diagnose-, Übungs- und Vertiefungsmaterial zu Bruchgleichungen**Vorüberlegungen**

Sind T_1 und T_2 Terme, bei denen keine Variable in einem Nenner steht, dann sind auch $T_1 + T_2$, $T_1 - T_2$ und $T_1 \cdot T_2$ Terme dieser Art. In einem ersten Schritt der Einführung in die Gleichungslehre wird man sich auf diese Termbildungen beschränken und den Term $T_1 : T_2$ ausschließen, wenn Gleichungen bezüglich einer Grundmenge gebildet werden. Jedes Element der Grundmenge kann für die Variable eingesetzt werden. Dadurch ergibt sich auf jeder Seite der Gleichung eine Zahl. Handelt es sich um die gleiche Zahl, liegt eine wahre Aussage vor, und dieses Element der Grundmenge ist ein Lösungselement. Entstehen auf der linken und rechten Seite unterschiedliche Zahlen, dann ist diese für die Variable eingesetzte Zahl kein Lösungselement. Da bei jeder Belegung der Variablen mit einem Element der Grundmenge Zahlen entstehen, ist die Grundmenge auch die Definitionsmenge der Gleichung.

Enthält ein Term in mindestens einem Nenner eine Variable, nennt man ihn einen **Bruchterm**. Enthält eine Gleichung mindestens einen Bruchterm, so heißt sie eine **Bruchgleichung**. Nimmt ein Nenner bei einer Belegung der Variablen mit einer Zahl der Grundmenge den Wert 0 an, ist der zugehörige Bruchterm für diese Einsetzung nicht definiert. Dann ist die Definitionsmenge eine echte Teilmenge der Grundmenge. Werden Bruchterme zugelassen, muss über Äquivalenzumformungen vertieft nachgedacht werden. Werden beide Seiten einer Gleichung mit dem gleichen Bruchterm multipliziert oder wird zu beiden Seiten einer Gleichung der gleiche Bruchterm addiert, kann dies die Definitionsmenge verändern. Da die Lösungsmenge stets eine echte oder unechte Teilmenge der Definitionsmenge ist, kann sich auch die Lösungsmenge ändern. Daher schlagen wir vor, die Betrachtung der Definitionsmenge der Gleichung in den Lösungsweg einzubinden. Bei Umformungen wird dann kein Term benutzt, dessen Nenner bei einer Belegung der Variablen mit einem Element der Definitionsmenge den Wert 0 annimmt. Wird auf die Betrachtung der Definitionsmenge verzichtet, sollten bei jeder Umformung die durch die Sonderrolle der Zahl 0 bewirkten einschränkenden Bedingungen notiert werden.

Wird die Variable eines Bruchterms mit einer Zahl belegt, kann es vorkommen, dass ein Nenner den Wert 0 annimmt und deshalb der Term nicht definiert ist. Schüler sollten wissen, warum nicht durch Null dividiert wird. Dies geschieht nicht, weil es verboten ist, sondern weil es nicht möglich ist, einem Quotienten $a : 0$ eindeutig ein Objekt zuzuweisen, mit dem widerspruchsfrei in der für Zahlen üblichen Weise gerechnet werden kann (siehe dazu auch den Beitrag 1.16 in dieser Ausgabe.)

Bei knapper Unterrichtszeit können Bruchgleichungen leider oft nicht mit der gesamten Klasse in wünschenswerter Breite und Tiefe behandelt werden. Unangenehm dürfte dies für Schüler werden, welche sich später wohl vorbereitet mit gebrochen-rationalen Funktionen beschäftigen sollen, bei denen die Betrachtung der Definitionsmenge unverzichtbar ist.

Es werden daher Arbeitsblätter angeboten, die auch zu weitgehend selbstständiger Arbeit der Schüler geeignet sind. Aus reichlichem Übungsmaterial kann gegebenenfalls eine angemessene Auswahl getroffen werden. Die verwendeten Zahlen sind so gewählt, dass ein Taschenrechner grundsätzlich überflüssig ist. Ein Ziel ist, dass Schüler elegante Lösungswege finden – dazu wird keine aufwendige Zahlenrechnung benötigt.

Die einzelnen Unterrichtsschritte im Überblick:

1. Schritt: Gleichungen mit Bruchzahlen
2. Schritt: Wie kann ein Fehler vermieden werden?
3. Schritt: Bestimmung der Lösungsmenge einer Bruchgleichung
4. Schritt: Weitere Bruchgleichungen

Unterrichtsplanung

1. Schritt: Gleichungen mit Bruchzahlen

Hier geht es noch nicht um Bruchgleichungen, sondern um Gleichungen, bei denen die Konstanten Bruchzahlen sein können. Es werden zwei Lösungswege vorgestellt:

- Die einzelnen Seiten der Gleichung werden zuerst für sich vereinfacht und danach wird die Gleichung so umgeformt, dass nur auf einer Seite die Variable und auf der anderen eine Zahl steht.
- Zuerst werden beide Seiten der Gleichung mit der gleichen von Null verschiedenen Zahl multipliziert, um eine nennerfreie äquivalente Gleichung zu gewinnen.

Arbeitsblatt 1 (M1); Lösungen siehe **M16**

2. Schritt: Wie kann ein Fehler vermieden werden?

Hier werden mögliche Fehler aufgezeigt, die bei einer zu naiven Behandlung einer Bruchgleichung entstehen können. Es soll deutlich werden, dass es der Behandlung einer Bruchgleichung nützlich ist, in einem ersten Schritt die Definitionsmenge der Gleichung zu bestimmen.

Arbeitsblätter 2.1 bis 2.4 (M2 bis M5); Lösungen siehe **M16**

3. Schritt: Bestimmung der Lösungsmenge einer Bruchgleichung

Zuerst werden Lösungswege skizziert. Dabei kann das erworbene Wissen angemessen vertieft werden. Danach stehen Übungsaufgaben zur Auswahl bereit. Hier liegt die Menge der rationalen Zahlen zugrunde.

Arbeitsblätter 3.1 bis 3.7 (M6 bis M12); Lösungen siehe **M16 bis M18**

4. Schritt: Weitere Bruchgleichungen

Nachhaltigkeit wird dann erreicht, wenn an ein Thema nach einer ersten einführenden Behandlung immer wieder erinnert wird. Es gibt Bruchgleichungen, die auf quadratische Gleichungen führen können. Es werden auch Bruchgleichungen angeboten, in den die Konstanten Wurzeln sein können. Hier wird die Menge der reellen Zahlen zugrunde gelegt.

Arbeitsblätter 4.1 bis 4.3 (M13 bis M15); Lösungen siehe **M19 bis M21**

Gleichungen mit Bruchzahlen

Grundmenge sei Q. Bestimme die Lösungsmenge der Gleichung

$$1,5 - \frac{5}{8} - \frac{5}{12}x + \frac{1}{4}x = 0.$$

Im Folgenden werden zwei mögliche Lösungswege angegeben. Vergleiche beide.

1. Lösungsweg:

Zuerst werden Terme vereinfacht.

$$1,5 - \frac{5}{8} - \frac{5}{12}x + \frac{1}{4}x = 0$$

$$\frac{3}{2} - \frac{5}{8} - \frac{5}{12}x + \frac{1}{4}x = 0$$

$$\frac{12 - 5}{8} - \frac{5 - 3}{12}x = 0$$

$$\frac{1}{6}x = \frac{7}{8}$$

$$x = \frac{21}{4}$$

Lösungsmenge: L = {5,25}

2. Lösungsweg:

Beide Seiten der Gleichung werden multipliziert.

$$1,5 - \frac{5}{8} - \frac{5}{12}x + \frac{1}{4}x = 0$$

$$\frac{3}{2} - \frac{5}{8} - \frac{5}{12}x + \frac{1}{4}x = 0 \quad | \cdot 24$$

$$36 - 15 - 10x + 6x = 0$$

$$4x = 21$$

$$x = 5,25$$

Lösungsmenge: L = {5,25}

Aufgabe:

Grundmenge sei Q. Bestimme jeweils die Lösungsmenge.

a) $\frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x = 14$

b) $\frac{28}{30}x - \frac{14}{21}x - \frac{13}{65}x = 2$

c) $0,25x - 0,3\bar{x} + \frac{5}{6} = 0$

d) $1,5x - 0,4 = 0,5$

e) $x = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x}{8} + \frac{x}{16} + \frac{x}{32}$

f) $\frac{1}{5}(x - 2) - \frac{1}{8}(3x - 17) = \frac{1}{2}$

g) $\frac{x + 11}{4} + \frac{4x - 1}{3} = \frac{3x - 7}{2}$

h) $\frac{x + 4}{3} - \frac{x - 4}{5} = 2 + \frac{3x - 1}{15}$

i) $\frac{5}{15}(4x + 7) + 8x = \frac{17}{34}(6x + 5) + 3$

j) $1,5(2 - x) = \frac{2}{3}(x - 5) + x$

k) $\frac{2}{3}x + \frac{5}{6}x + \frac{1}{2}x = 3x$

l) $\frac{7}{8}x - \frac{5}{24}x + \frac{1}{3}x = x$

m) $\frac{11}{12}x - \frac{2}{3}x = 2 + 0,25x$

n) $\frac{7}{12}x - \frac{5}{8}x + \frac{1}{4}x - 5 = 0$

Eine Gleichung heißt eine **Bruchgleichung**, wenn die Variable in mindestens einem Nenner steht.

Die oben angegebenen Gleichungen sind keine Bruchgleichungen, sondern Gleichungen, bei denen Bruchzahlen vorkommen.

1.17 Diagnose-, Übungs- und Vertiefungsmaterial zu Bruchgleichungen**M2****Arbeitsblatt 2.1****Wie kann ein Fehler vermieden werden? (1)****Aufgabe 1:**

Grundmenge sei Q . Bestimme die Lösungsmenge der Gleichung

$$\frac{5 - 2x}{x - 3} + \frac{4 - 2x}{3 - x} = 1 \quad (1)$$

Ziel ist es, zuerst eine Gleichung herzustellen, bei der in keinem Nenner die Variable x steht. Dazu werden Umformungen vorgenommen.

Umformung A:

$$\begin{aligned} \frac{5 - 2x}{x - 3} + \frac{4 - 2x}{3 - x} &= 1 && | \cdot (x - 3)(3 - x) \\ (5 - 2x)(3 - x) + (4 - 2x)(x - 3) &= (x - 3)(3 - x) && (2) \end{aligned}$$

Umformung B:

$$\begin{aligned} \frac{5 - 2x}{x - 3} + \frac{4 - 2x}{3 - x} &= 1 && | \cdot (x - 3) \\ 5 - 2x + (-1)(4 - 2x) &= x - 3 && (3) \end{aligned}$$

Wir untersuchen, ob die Zahl 3 eine Lösung der Gleichung (1) ist.

$$T_L(3) = \frac{5 - 6}{3 - 3} + \frac{4 - 6}{3 - 3} = \frac{-1}{0} + \frac{-2}{0} \text{ ist nicht definiert. } T_L(3) \text{ bezeichnet keine Zahl.}$$

$$T_R(3) = 0$$

„ $T_L(3) = T_R(3)$ “ ist keine wahre Aussage.

Die Zahl 3 ist keine Lösung der vorgegebenen Gleichung (1).

In einer Gleichung kann für die Variable eine Zahl der Grundmenge eingesetzt werden. Eine Zahl ist dann und nur dann eine **Lösung**, wenn nach ihrer Einsetzung für die Variable auf beiden Seiten der Gleichung die gleiche Zahl dargestellt wird.

a) Untersuche, ob die Zahl 3 eine Lösung der Gleichung (2) ist.

Feststellung: Die Zahl 3 ist eine Lösung der Gleichung (2).

b) Untersuche, ob die Zahl 3 eine Lösung der Gleichung (3) ist.

Feststellung: Die Zahl 3 ist keine Lösung der Gleichung (3).

Werden beide Seiten einer Bruchgleichung mit dem gleichen Term $T(x)$ multipliziert, kann es geschehen, dass die entstehende Gleichung zusätzliche Lösungen hat. Dabei kann es sich nur um die Zahlen handeln, für welche der Term $T(x)$ den Wert 0 annimmt.

Wie kann ein Fehler vermieden werden? (2)**Aufgabe 2.1:**

Grundmenge sei Q . Bestimme die Lösungsmenge der Gleichung

$$\frac{5}{x-2} + \frac{3}{x+1} = \frac{x+3}{x-2} \quad (1)$$

Lösungsversuch:

$$\frac{5}{x-2} + \frac{3}{x+1} = \frac{x+3}{x-2}$$

$$\frac{3}{x+1} = \frac{x-2}{x-2}$$

$$\frac{3}{x+1} = 1 \quad (2)$$

Fehler?

$$| + \frac{-5}{x-2}$$

Der rechte Term wird gekürzt. Ist dies zulässig?

Ein Bruch mit dem Zähler 3 nimmt dann und nur dann den Wert 1 an, wenn auch der Nenner den Wert 3 annimmt. Es ist $x+1=3$ für $x=2$.

Ist die Zahl 2 ein Lösungselement der Gleichung (1)?

$T_L(2) = \frac{5}{2-2} + \frac{3}{2+1} = \frac{5}{0} + \frac{3}{3} = \frac{5}{0} + 1$ bezeichnet keine Zahl. Die Zahl 2 ist keine Lösung der Gleichung (1).

Allerdings ist die Zahl 2 eine Lösung der Gleichung (2).

Der Übergang von der Gleichung (1) zur Gleichung (2) ist keine Äquivalenzumformung!

Hier werden zwei Operationen vorgenommen: Zu beiden Seiten der Gleichung wird ein Term addiert und danach wird ein Term gekürzt. Wird korrekt gekürzt?

Es ist $\frac{x-2}{x-2} = 1$ für alle Zahlen x mit $x \neq 2$. Dagegen bezeichnet $\frac{2-2}{2-2} = \frac{0}{0}$ keine Zahl.

Ein Bruch kann nicht durch die Zahl 0 gekürzt werden. Geschieht dies trotzdem in einem Term einer Gleichung, kann sich dadurch die Lösungsmenge verändern.

Gibt es eine Möglichkeit, fehlerfrei zu kürzen? Es kann zur Gleichung (2) zusätzlich $x \neq 2$ gefordert werden.

Dies kann in der Praxis dadurch überflüssig werden, dass am Anfang die Definitionsmenge der Gleichung eingeführt wird. Hier ergibt sich die Definitionsmenge $Q \setminus \{-1; 2\}$.

Definitionsmenge:

In einer Gleichung kann für die Variable eine Zahl eingesetzt werden.

Diejenigen Zahlen der Grundmenge, bei deren Einsetzung für die Variable auf jeder Seite der Gleichung eine Zahl entsteht, bilden die Definitionsmenge der Gleichung.

Die Lösungsmenge ist eine echte oder unechte Teilmenge der Definitionsmenge.



SCHOOL-SCOUT.DE

Unterrichtsmaterialien in digitaler und in gedruckter Form

Auszug aus:

*Bruchgleichungen: Diagnosematerial, Übungsmaterial und
Vertiefungsmaterial*

Das komplette Material finden Sie hier:

School-Scout.de

