Unterrichtsmaterialien in digitaler und in gedruckter Form

Auszug aus:

Analysis: Normalformen affiner Abbildungen - Abiturvorbereitung

Das komplette Material finden Sie hier:

School-Scout.de

Normalformen affiner Abbildungen

Dr. Jürgen Bohla, Wuppertal
Illustrationen von Dr. Jürgen Leitz, Hamburg

© blackred/E+/Getty Images Plus

Abbildungen, die Eigenschaften von Objekten wie Winkel, Parallelität und Teilverhältnisse erhalten, spielen in vielen Bereichen von Wissenschaft und Technik, etwa Bildbearbeitung oder Kartografie, eine wichtige Rolle. Es handelt sich dabei um die Translation, Drehung, Spiegelung und zentrische Streckung/Stauchung. Alle diese Operationen können mit affinen Abbildungen dargestellt werden. Wählt man für einen linearen Vektorraum eine feste Basis aus Einheitsvektoren, lassen sich affine Abbildungen durch Matrizen darstellen. Die Kenntnis von Eigenwerten und Eigenvektoren und der Normalform einer solchen Abbildung bzw. ihrer darstellenden Matrix ermöglicht vielfältige Berechnungen. Diese mathematischen Konzepte werden hier Schritt für Schritt erklärt und eingeübt.

RAABE
KLASSE SCHULE

Normalformen affiner Abbildungen

Oberstufe (Niveau)

Dr. Jürgen Bohla, Wuppertal
Illustrationen von Dr. Jürgen Leitz, Hamburg

Die Schüler lernen:

Abbildungen kennen, die Eigenschaften von Objekten wie Winkel, Parallelität und Teilverhältnisse erhalten: Translation, Drehung, Spiegelung und zentrische Streckung/Stauchung. Wählt man für einen linearen Vektorraum eine feste Basis aus Einheitsvektoren, lassen sich affine Abbildungen durch Matrizen darstellen. Die Kenntnis von Eigenwerten und Eigenvektoren und der Normalform einer solchen Abbildung bzw. ihrer darstellenden Matrix ermöglicht vielfältige Berechnungen. Diese mathematischen Konzepte werden hier Schritt für Schritt erklärt und eingeübt.

Überblick:

Legende der Abkürzungen:
Ab = Arbeitsblatt

Thema	Material	Methode
Normalformen linearer Abbildungen	M1	Ab
Transformation in Normalform – Hausaufgabe	M2	Ab
Komposition von Abbildungen	M3	Ab
Die Umkehrabbildung	M4	Ab
Affine Abbildungen und ihre Analyse	M5	Ab
Drehung als Kongruenz-/ Ähnlichkeitsabbildung	M6	Ab

Kompetenzprofil:

Inhalt: Affine Abbildungen, wie Translation, Drehung, Spiegelung, zentrische Streckung und Stauchung, Basisvektor, Abbildungsmatrix, Eigenwert, Eigenvektor, Normalform
Medien: GTR/CAS, GeoGebra
Kompetenzen: Mathematisch argumentieren und beweisen (K1), Probleme mathematisch lösen (K2), mathematisch modellieren (K3), mathematische Darstellungen verwenden (K4), mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5), kommunizieren (K6)

M 1 Normalformen linearer Abbildungen

Das Orthonormalsystem mit der aus den Einheitsvektoren $\overrightarrow{e_1}$ und $\overrightarrow{e_2}$ bestehenden **Standardbasis** ist eine mögliche Basis im $\mathbb{R}^2$, um eine Abbildung zu definieren. Oftmals lässt sich dieselbe Abbildung aber zweckmäßiger durch eine andere, einfachere Basis beschreiben. Dadurch entsteht ein anderes, i. d. R. **nichtkartesisches Koordinatensystem**.

Nur **linear unabhängige Vektoren** können eine **Basis** bilden. Den Übergang von einer Basis auf eine andere Basis bezeichnet man als **Basistransformation**. Mit dem Übergang auf eine andere Basis ändern sich die Koordinaten von Urbildpunkt und Bildpunkt. Ein solcher Basiswechsel ist vor allem dann sinnvoll, wenn sich dadurch die Abbildung vereinfachen lässt. Unter allen möglichen Vektoren einer Abbildung nehmen die **Eigenvektoren** als auf sich selbst abbildende Vektoren eine Sonderstellung ein. Daher liegt es nahe, die Eigenvektoren als Basis der Abbildung zu wählen. Man nennt diese Form der Abbildung dann **Normalform**.

Aufgabe

Wir betrachten die beiden linearen Abbildungen:

$a:\ \vec{x}' = \begin{pmatrix} -4 & 7 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$ und $b:\ \vec{x}' = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$.

Diese Abbildungen sollen in die Normalform umgewandelt werden.

a) Ermitteln Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Abbildungen.
b) Untersuchen Sie diese Abbildungen mit einem oder zwei verschiedenen Eigenwerten und transformieren Sie die Abbildung aus der bisherigen Basis in die neue Basis mit den Eigenvektoren als Basisvektoren. Leiten Sie daraus die Normalform ab, zunächst in allgemeiner Form, dann für Abbildung A bzw. Abbildung B.
c) Berechnen Sie für das Dreieck $P(2|0)$, $Q(0|2)$, $R(2|2)$ das Bilddreieck nach der ursprünglichen Abbildungsgleichung und nach der Normalform. Stellen Sie den Zusammenhang von ursprünglicher Abbildung und Normalform für Abbildung a und den Punkt $Q(0|2)$ grafisch dar.