

SCHOOL-SCOUT.DE

Unterrichtsmaterialien in digitaler und in gedruckter Form

Auszug aus:

Würfeln mit Oktaeder und Tetraeder

Das komplette Material finden Sie hier:

School-Scout.de



Auf einen Blick

Oktaeder und Tetraeder

M 1 Aufgaben

M 2 Spiel mit 5 Würfeln

Benötigt: Tabellenkalkulationsprogramm
 GTR/CAS

Erklärung zu den Symbolen



Dieses Symbol markiert differenziertes Material. Wenn nicht anders ausgewiesen, befinden sich die Materialien auf mittlerem Niveau.



leichtes Niveau



mittleres Niveau



schwieriges Niveau

Aufgaben

M 1

Ein Oktaeder hat acht kongruente Seitenflächen, die mit den Zahlen 1 bis 8 beschriftet sind. Wirft man bei einem Würfelspiel einen Oktaeder, so ist die Zahl gewürfelt, die auf der oberen Dreiecksfläche steht. Im nebenstehenden Oktaeder wurde also die 5 gewürfelt.



Fotos: Günther Weber

Ein Tetraeder hat vier kongruente Seitenflächen; die Kanten des Tetraeders sind mit 1, 2, 3 oder 4 beschriftet. Wirft man bei einem Würfelspiel einen Tetraeder, so ist die Zahl gewürfelt, die auf den sichtbaren Bodenkanten steht. Im nebenstehenden Tetraeder wurde also die 4 gewürfelt.

1. Ein Tetraeder und ein Oktaeder werden geworfen.
 - a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für folgende Ereignisse:
 - E1: Die Oktaeder- und die Tetraederzahl sind gleich.
 - E2: Die Oktaederzahl ist kleiner als die Tetraederzahl.
 - E3: Die Oktaederzahl ist ein Vielfaches der Tetraederzahl.
 - E4: Die Summe der beiden Zahlen ist gerade.
 - E5: Die Summe der beiden Zahlen ist mindestens 10.
 - E6: Der Abstand der beiden Zahlen ist höchstens 2.
 - E7: Für den Quotient gilt: $\frac{1}{3} < \frac{\text{Tetraederzahl}}{\text{Oktaederzahl}} < 1$.
 - E8: Die Tetraederzahl eine 4 ist, wenn die Summe der beiden Zahlen mindestens 9 beträgt.
 - E9: Die Oktaederzahl kleiner oder gleich 2 ist, wenn das Produkt der beiden Zahlen höchstes 10 ist.
 - b) Bestimmen Sie die minimale Anzahl von gleichzeitigen Würfeln mit Oktaeder und Tetraeder, die notwendig ist, damit mit mindestens 99 %-iger Sicherheit das Produkt der beiden Zahlen mindestens einmal größer als 20 ist.
 - c) Es wird 10-mal gleichzeitig ein Oktaeder und ein Tetraeder geworfen. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für die Ereignisse:
 - E10: Bei höchstens 4 Würfeln ist die Summe der beiden Zahlen eine Primzahl und das Produkt der beiden Zahlen größer als 16.
 - E11: Bei mindestens 4 Würfeln ist die Oktaederzahl gerade oder die Tetraederzahl ungerade.
 - E12: Die Anzahl der Würfel, bei denen der Abstand zwischen der Oktaederzahl und der Tetraederzahl eine Primzahl ist, ist größer als 3 und höchstens 8.

Münze zeigt Zahl

Oktaeder- zahl \ Tetra- ederzahl	1	2	3	4	5	6	7	8
1	d	4	5	6	7	8	9	10
2	5	6	7	8	9	10	11	12
3	7	8	9	e	11	12	13	14
4	9	10	11	12	13	14	f	16

- b) Bestimmen Sie eine Wahrscheinlichkeitsverteilung für den Wert der Summe.
- c) Bestimmen Sie den Median m_{insg} aller Summenwerte, den Median m_{Kopf} der Summenwerte, wenn die Münze Kopf und den Median m_{Zahl} der Summenwerte, wenn die Münze Zahl zeigt.

Durch den Münzwurf erhält man für die Summenwerte zwei Tabellen.

- d) Berechnen Sie mithilfe dieser beiden Tabellen die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse.
- E1:** Die Münze Kopf zeigt, wenn der Summenwert kleiner oder gleich m_{Zahl} ist.
E2: Die Münze Zahl zeigt, wenn der Summenwerte größer als m_{Kopf} ist.
E3: Die Münze Zahl zeigt, wenn der Wert der Summe gerade und größer oder gleich 10 ist.

Bei den folgenden Aufgaben werden die Summenwerte aus beiden Tabellen bei gleicher Oktaeder- und Tetraederzahl zu einem Zahlenpaar $(\text{Summe}_{\text{Kopf}}; \text{Summe}_{\text{Zahl}})$ zusammengefasst.

Mit der Tetraederzahl 2 und Oktaederzahl 4 erhält man somit das Zahlenpaar $(10; 8)$.

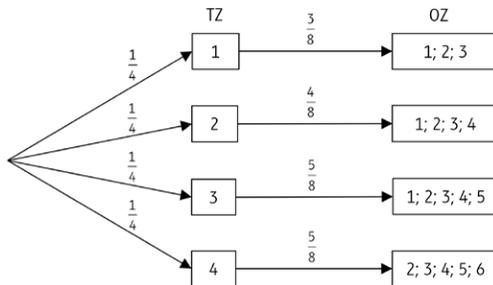
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse:

- E4:** Die Komponenten des Zahlenpaars unterscheiden sich um wenigstens 4.
E5: Die Summe der Komponenten des Zahlenpaar ist größer als 24.
E6: Die Summe der Komponenten des Zahlenpaars ist ein Vielfaches von 3.
- e) Die Summenwerte werden für ein Spiel genutzt. Ist der Summenwert durch 3 teilbar, so erhält man 3 €, ist der Summenwert durch 4 teilbar, so erhält man 4 € und bei einer Teilbarkeit von 3 und 4 erhält man das Doppelte des Produkts der Summenwerte. Überprüfen Sie, ob das Spiel bei einem Einsatz von 1 € fair ist.

Oktaeder- zahl \ Tetra- ederzahl	1	2	3	4	5	6	7	8
1								
2								x
3							x	x
4						x	x	x

$$P(E_5) = \frac{6}{32} = \frac{3}{16}$$

E6: Der Abstand der beiden Zahlen ist höchstens 2.



Grafik: Günter Gerstbrein

$$P(E_6) = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{8} + \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{8} + \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{8} + \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{8} = \frac{17}{32}$$

Oktaeder- zahl \ Tetra- ederzahl	1	2	3	4	5	6	7	8
1	x	x	x					
2	x	x	x	x				
3	x	x	x	x	x			
4		x	x	x	x	x		

$$P(E_6) = \frac{17}{32}$$

x_i	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Anzahl	2	2	2	2	2	2	2	1	1

Es gibt insgesamt 32 Summenwerte, sodass der Median in der geordneten Liste der Wert zwischen dem 16. und 17. Summenwert ist. Summiert man in der Wahrscheinlichkeitsverteilung beginnend beim Summenwert 3 die Anzahlen auf, so ist der 16.

Wert eine 11, der 17. Wert eine 12. Somit ist $m_{\text{Kopf}} = \frac{11 + 12}{2} = 11,5$.

Zeigt die Münze **Zahl**, so erhält man folgende Anzahlen:

x_i	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Anzahl	1	1	2	2	3	3	4	4	3

x_i	12	13	14	15	16
Anzahl	3	2	2	1	1

Summiert man in der Wahrscheinlichkeitsverteilung beginnend beim Summenwert 3 die Anzahlen auf, so ist der 16. Wert eine 9, der 17. Wert eine 10.

Somit ist $m_{\text{Zahl}} = \frac{9 + 10}{2} = 9,5$.

- c) Die bedingte Wahrscheinlichkeit $P_A(B)$ (Die Wahrscheinlichkeit von B unter der Bedingung, dass A bereits eingetreten ist), kann berechnet werden
- durch Auszählen bei einer Tabelle mit gleichwahrscheinlichen Zellelementen,
 - mithilfe der Vierfeldertafel oder
 - mithilfe eines umgedrehten Baumdiagramms.

Es ist $m_{\text{Zahl}} = 9,5$

E1: Berechnung durch Auszählen bei einer Tabelle mit gleichwahrscheinlichen Zellelementen:

		Münzwurf: Kopf										Münzwurf: Zahl							
OZ	TZ	1	2	3	4	5	6	7	8	OZ	TZ	1	2	3	4	5	6	7	8
		1	3	5	7	9							1	3	4	5	6	7	8
2	4	6	8						2	5	6	7	8	9					
3	5	7	9						3	7	8	9							
4	6	8							4	9									

12 Zellelemente sind in der „Kopftabelle“ und 16 Zellelemente sind in der „Zahl-tabelle“ kleiner als 9,5. Von den insgesamt 28 Zellelementen kleiner als 9,5 sind 12 in der „Kopftabelle“. Es ist daher $P_{\text{Kopf}}(\text{Summe} \leq m_{\text{Zahl}}) = \frac{12}{28} = \frac{3}{7}$.

Die Wahrscheinlichkeit, dass die Münze Kopf zeigt, wenn der Summenwert kleiner oder gleich m_{Zahl} ist, beträgt $\frac{3}{7}$.

d) I.

Das Spiel endet unentschieden, wenn Maike dreimal die Summe 5 und Tim zweimal die Summe 4 wirft. $P(\text{unentschieden}) = \left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^2 = \frac{1}{4096}$

$$P(\text{unentschieden}) = \left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^2 = \frac{1}{4096}$$

II.

Maike gewinnt, wenn sie dreimal die Summe 5 und Tim weniger als zweimal die Summe 4 wirft. Tim gewinnt, wenn er zweimal die Summe 4 und Maike weniger als dreimal die Summe 5 wirft.

Maike	Tim	Maike	Tim	Maike				
5	4	5	4	5	2	1/4096	3	1/4096
5	4	5	4	s	2	3/4096	2	
5	4	5	s	5	1		3	7/4096
5	4	s	4	5	2	3/4096	2	
5	4	s	4	s	2	9/4096	1	
5	s	5	4	5	1		3	7/4096
5	s	5	s	5	0		3	49/4096
s	4	5	4	5	2	3/4096	2	
s	4	5	4	s	2	9/4096	1	
s	4	s	4	5	2	9/4096	1	
s	4	s	4	s	2	27/4096	0	
						63/4096		63/4096

(s bedeutet in der Tabelle, dass Maike nicht die Summe 5 bzw. Tim nicht die Summe 4 wirft.)

Berechnen der Wahrscheinlichkeiten für diese Möglichkeiten und Aufsummieren der Wahrscheinlichkeiten zeigt, dass die Gewinnwahrscheinlichkeiten für Maike und Tim gleich sind.

Alternative Berechnung durch kombinatorische Überlegungen:

Maike gewinnt und es kommt zu keinem Unentschieden, wenn sie dreimal die Summe 5 und Tim weniger als zweimal die Summe 4 wirft. Hierzu gibt es 3 Möglichkeiten:

$$P(\text{Maike gewinnt}) = \left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{8} \cdot \frac{7}{8} + \frac{7}{8} \cdot \frac{1}{8} + \frac{7}{8} \cdot \frac{7}{8}\right) = \frac{1}{64} \cdot \frac{63}{64} = \frac{63}{4096}$$

Maike	Tim	Maike	Tim	Maike
5	4	5	s	5
5	s	5	4	s
5	s	5	s	5

Tim gewinnt und es kommt zu keinem Unentschieden, wenn er zweimal die Summe 4 und Maike weniger als dreimal die Summe 5 wirft. Hat Maike einmal nicht die

SCHOOL-SCOUT.DE

Unterrichtsmaterialien in digitaler und in gedruckter Form

Auszug aus:

Würfeln mit Oktaeder und Tetraeder

Das komplette Material finden Sie hier:

School-Scout.de



A.3.7

Zufallsexperimente – Vermischte Aufgaben

Würfeln mit Oktaeder und Tetraeder

Günther Weber



Als Spielwürfel werden überwiegend sechseckige Würfel (Hexaeder), dessen Seitenflächen mit einem bis sechs Punkten beschriftet sind, genutzt. Im vorliegenden Material untersuchen Ihre Schülerinnen und Schüler das Würfeln mit einem Oktaeder sowie das Würfeln mit einem Tetraeder und einem bzw. zwei Tetraedern. Durch das zusätzliche Werfen einer Münze werden die gewürfelten Punkte gewichtet. Die Lernenden bestimmen hierzu (bedingte) Wahrscheinlichkeiten durch das Zeichnen von Baumdiagrammen bzw. durch Anwenden der Binomialverteilung. Ebenso berechnen sie den Erwartungswert und überprüfen, ob ein Spiel mit Tetraeder und Oktaeder fair ist.