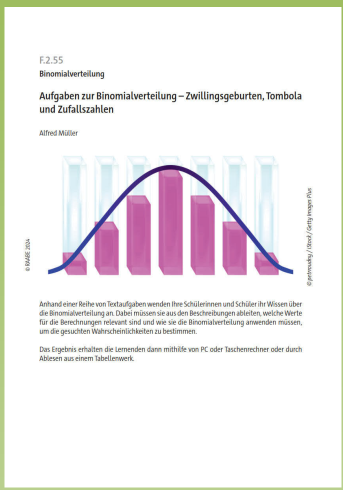
Unterrichtsmaterialien in digitaler und in gedruckter Form

Auszug aus:

Aufgaben zur Binomialverteilung

Das komplette Material finden Sie hier:

[School-Scout.de]


F.2.55

Binomialverteilung

Aufgaben zur Binomialverteilung – Zwillingsgeburten, Tombola und Zufallszahlen

Alfred Müller

© RAABE 2024

© petrroudny / iStock / Getty Images Plus

Anhand einer Reihe von Textaufgaben wenden Ihre Schülerinnen und Schüler ihr Wissen über die Binomialverteilung an. Dabei müssen sie aus den Beschreibungen ableiten, welche Werte für die Berechnungen relevant sind und wie sie die Binomialverteilung anwenden müssen, um die gesuchten Wahrscheinlichkeiten zu bestimmen.

Das Ergebnis erhalten die Lernenden dann mithilfe von PC oder Taschenrechner oder durch Ablesen aus einem Tabellenwerk.

Binomialverteilung – Überblick

M 1

Die Binomialverteilung ist eine Wahrscheinlichkeitsverteilung, mit der sich eine Reihe von unabhängigen Versuchen beschreiben lässt, für die es jeweils genau zwei mögliche Ergebnisse gibt, die sich z. B. als „Erfolg" und „Misserfolg" beschreiben lassen. Die Wahrscheinlichkeit für einen „Erfolg" wird dabei mit p bezeichnet, der „Misserfolg" entspricht der Gegenwahrscheinlichkeit $1 - p$.

Beispiele für die Anwendung:

– Werfen von Münzen: „Zahl" = „Erfolg", „Wappen" = „Misserfolg" (oder umgekehrt)
– $p = 1 - p = 0{,}5$
– Werfen eines Würfels: Ergebnis 6 = „Erfolg", alle anderen Zahlen = „Misserfolg"

$$p = \frac{1}{6} \Rightarrow \text{Gegenwahrscheinlichkeit} = 1 - p = \frac{5}{6}$$

Mit der Binomialverteilung lässt sich die Frage klären, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, mindestens, höchstens oder genau k Erfolge bei einer Reihe von n Versuchen zu erzielen.

Genau k Erfolge bei n Versuchen und einer Erfolgswahrscheinlichkeit p:

$$B_p^n(X = k) = \binom{n}{k} p^n (1-p)^{n-k}$$

Mindestens k Erfolge bei n Versuchen und einer Erfolgswahrscheinlichkeit p:

$$B_p^n(X \le k) = B_p^n(X = 0) + B_p^n(X = 1) + \ldots + B_p^n(X = k) = \sum_{i=0}^{k} B_p^n(X = i)$$

Anhand dieser Formeln lassen sich weitere Wahrscheinlichkeiten bestimmen.

Höchstens k Erfolge bei n Versuchen und einer Erfolgswahrscheinlichkeit p:

Verwendung der Gegenwahrscheinlichkeit:

$$B_p^n(X \ge k) = 1 - B_p^n(X < k)$$

Mindestens k und höchstens j Erfolge bei n Versuchen und einer Erfolgswahrscheinlichkeit p:

$$B_p^n(k \le X \le j) = B_p^n(X \le j) - B_p^n(X < k)$$

Hinweis: Es ist wichtig, immer genau aufs Relationszeichen zu achten:

$$B_p^n(X < k) = B_p^n(X \le k - 1)$$

Eine manuelle Berechnung kann abhängig von den Werten k und n sehr aufwendig sein. Daher empfiehlt sich der Einsatz von Computer oder Taschenrechner bzw. eines Tabellenwerks zur Binomialverteilung.

Aufgabe 5

Die Zufallsgröße Z gibt die Anzahl der Flaschen mit genießbarem Inhalt an. Z ist binomialverteilt mit p = 0,8.

a) $B_{0,8}^{10}(Z=8)=0{,}30199=30{,}20\%$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von 30,20 % sind acht der zehn Flaschen genießbar.

b) $B_{0,8}^{20}(Z\geq 16)=1-B_{0,8}^{20}(Z\leq 15)=1-0{,}37035=0{,}62965=62{,}97\%$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von 62,97 % sind mindestens 16 der 20 Flaschen noch genießbar.

Aufgabe 6

a) Die Zufallsgröße Z gebe die Anzahl der Personen an, die den genannten Schalter aufsuchen. Z ist binomialverteilt mit p = 0,60 und n = 10.

(i) $B_{0,6}^{10}(Z=6)=0{,}25082=25{,}08\%$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von 25,08 % besuchen genau sechs von zehn Kunden den Schalter.

(ii) $B_{0,6}^{10}(Z\leq 5)=0{,}36690=36{,}69\%$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von 36,69 % besuchen höchstens fünf von zehn Kunden den Schalter.

b) Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Kunde nicht den Schalter für Brief- und Paketpost sondern für Postbankkunden besucht, beträgt $1-0{,}6=0{,}4$.

Ferner gilt stets: P(mindestens ein ...) = 1 – P(kein ...)

$$1-\left(1-0{,}6\right)^{n}>0{,}99$$
$$1-0{,}4^{n}>0{,}99$$
$$0{,}4^{n}<0{,}01$$
$$n\cdot\ln 0{,}4<\ln 0{,}01 \qquad \left|:\ln 0{,}4<0\Rightarrow \text{Relationszeichen umdrehen!}\right.$$
$$n>\frac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}4}=5{,}03\Rightarrow n\geq 6$$

Man muss mindestens sechs Kunden beobachten.

Aufgabe 16

Die Zufallsgröße Z gebe die Anzahl der Treffer an. Z ist binomialverteilt mit p = 0,2 und n = 12. Damit er genau zwölf Schüsse braucht, müssen unter den ersten elf Schüssen zwei der drei Treffer sein, der dritte Treffer muss beim zwölften Schuss fallen.

$$P(E) = \underbrace{\binom{11}{2} \cdot 0{,}2^2 \cdot 0{,}8^9}_{\text{2 Treffer bei den ersten 11 Schüssen}} \cdot \underbrace{0{,}2}_{\text{3. Treffer beim 12. Schuss}} = 0{,}05906 = 5{,}91\%$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von 5,91 % erzielt er den dritten Treffer im zwölften Versuch.

Aufgabe 17

Die Zufallsgröße Z gebe die Anzahl der Gewinne an. Z ist binomialverteilt mit p = 0,25.

Ereignis E_1: Der zweite Gewinn spätestens beim achten Spiel bedeutet, dass es **nicht** sein darf, dass **höchstens** ein Treffer bei acht Versuchen auftritt.

$$P(E_1) = 1 - B^8_{0,25}(Z \leq 1) = 1 - 0{,}36708 = 0{,}63292 = 63{,}29\%$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von 63,29 % tritt der zweite Gewinn spätestens beim achten Spiel ein.

Ereignis E_2: Der zweite Gewinn frühestens beim vierten Spiel bedeutet, dass bei den ersten drei Spielen höchstens ein Gewinn auftreten darf.

$$B^3_{0,25}(Z \leq 1) = 0{,}84375 = 84{,}38\%$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von 84,38 % tritt der zweite Gewinn frühestens beim vierten Spiel ein.

Aufgabe 18

Die Zufallsgröße Z gebe die Anzahl der Sechser an. Z ist binomialverteilt mit $p = \frac{1}{6}$.

a) Gesucht ist der Wert für n, für den der Ausdruck $B^n_{\frac{1}{6}}(Z = 1)$ maximal wird. Mithilfe eines Computers bzw. Taschenrechners oder einer Tabelle lässt sich ermitteln, dass dies für n = 5 bzw. n = 6 der Fall ist. Es gilt dort:

$$B^5_{\frac{1}{6}}(Z = 1) = B^6_{\frac{1}{6}}(Z = 1) = 0{,}40188 = 40{,}19\%.$$

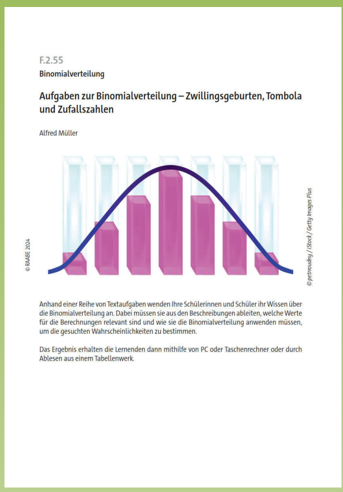
Unterrichtsmaterialien in digitaler und in gedruckter Form

Auszug aus:

Aufgaben zur Binomialverteilung

Das komplette Material finden Sie hier:

School-Scout.de



F.2.55

Binomialverteilung

Aufgaben zur Binomialverteilung – Zwillingsgeburten, Tombola und Zufallszahlen

Alfred Müller

© RAABE 2024

© petrroudny / iStock / Getty Images Plus

Anhand einer Reihe von Textaufgaben wenden Ihre Schülerinnen und Schüler ihr Wissen über die Binomialverteilung an. Dabei müssen sie aus den Beschreibungen ableiten, welche Werte für die Berechnungen relevant sind und wie sie die Binomialverteilung anwenden müssen, um die gesuchten Wahrscheinlichkeiten zu bestimmen.

Das Ergebnis erhalten die Lernenden dann mithilfe von PC oder Taschenrechner oder durch Ablesen aus einem Tabellenwerk.