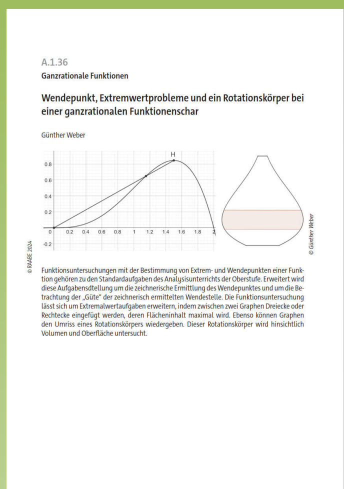
Unterrichtsmaterialien in digitaler und in gedruckter Form

Auszug aus:

Wendepunkt, Extremwertprobleme und ein Rotationskörper

Das komplette Material finden Sie hier:

[School-Scout.de]



A.1.36

Ganzrationale Funktionen

Wendepunkt, Extremwertprobleme und ein Rotationskörper bei einer ganzrationalen Funktionenschar

Günther Weber

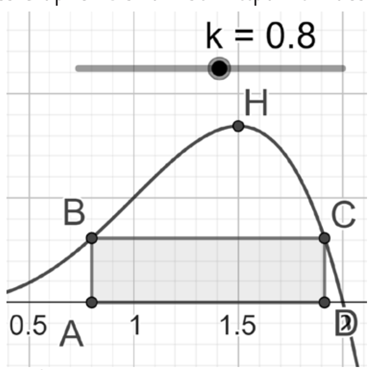
© RAABE 2024

© Günther Weber

Funktionsuntersuchungen mit der Bestimmung von Extrem- und Wendepunkten einer Funktion gehören zu den Standardaufgaben des Analysisunterrichts der Oberstufe. Erweitert wird diese Aufgabensdtellung um die zeichnerische Ermittlung des Wendepunktes und um die Betrachtung der „Güte“ der zeichnerisch ermittelten Wendestelle. Die Funktionsuntersuchung lässt sich um Extremalwertaufgaben erweitern, indem zwischen zwei Graphen Dreiecke oder Rechtecke eingefügt werden, deren Flächeninhalt maximal wird. Ebenso können Graphen den Umriss eines Rotationskörpers wiedergeben. Dieser Rotationskörper wird hinsichtlich Volumen und Oberfläche untersucht.

2. Es sei $f_{a;0,5}(x) = a \cdot x^3 - 0,5 \cdot x^4; a > 0$, N die vom Ursprung verschiedene Nullstelle und W der vom Ursprung verschiedene Wendepunkt.
   a) Bestimmen Sie die Ortslinie der Hochpunkte.
   b) Bestimmen Sie den Flächeninhalt, den der Graph der Funktion und die Wendetangente im Punkt W einschließen.
   c) Die Wendetangente im Punkt W schneidet die x-Achse im Punkt N_t, der Graph der Funktion schneidet die x-Achse im Punkt N. Der Punkt H ist der absolute Hochpunkt des Graphen.
      i. Bestimmen Sie a so, dass das Dreieck N_tNH rechtwinklig ist.
      ii. Überprüfen Sie: Gibt es ein a, sodass das Dreieck N_tNH gleichseitig ist?
      iii. Bestimmen Sie rechnerisch den Anteil der Fläche des Dreiecks N_tNH an der Fläche, die der Graph der Funktion mit der x-Achse einschließt.
      Überprüfen Sie, ob der Anteil unabhängig vom Parameter a ist.
      iv. Der Flächeninhalt des Dreiecks beträgt $\frac{81}{128}$ FE. Bestimmen Sie den Parameter a.

3. Es sei $f(x) = f_{1;0,5}(x) = x^3 - 0,5 \cdot x^4$.
   a) Bestimmen Sie den Schnittwinkel, unter dem sich die Wendetangente und der Graph der Funktion im 3. Quadranten schneiden.
   b) Berechnen Sie die prozentuale Abweichung der x-Koordinate des graphisch ermittelten Wendepunkts aus Aufgabe 1c) von jener des rechnerisch bestimmten Wendepunkts.
   c) Der Graph der Funktion und die x-Achse schließen ein Dreieck ein; eine Seite des Dreiecks ist die Strecke vom Hochpunkt H des Graphen bis zum Schnittpunkt N des Graphen mit der x-Achse. Bestimmen Sie den dritten Punkt des Dreiecks so, dass der Flächeninhalt des Dreiecks maximal wird.
   d) Der Graph der Funktion und die x-Achse schließen ein Rechteck ein, dessen Seiten parallel zu den Achsen des Koordinatensystems verlaufen. Beschreiben Sie, wie man mithilfe eines Schiebereglers k, 0 < k < 1,5 ein Rechteck mit maximalem Flächeninhalt konstruieren kann.

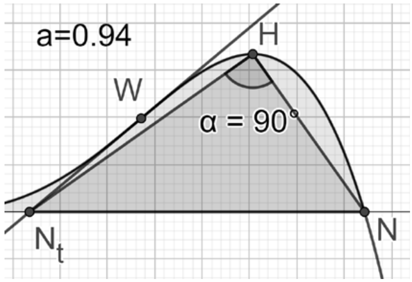


Grafik: Günther Weber

Das Dreieck N_tNH ist rechtwinklig beim Punkt H, wenn die Steigungen der Geraden, auf denen die Dreieckseiten $\overline{N_tH}$ und $\overline{NH}$ liegen, senkrecht aufeinander stehen. Dies ist der Fall, wenn das Produkt der Steigungen gleich –1 ist.

$$m_1 = m_{N_tH} = \frac{\frac{27a^4}{32} - 0}{\frac{3a}{2} - \frac{a}{2}} = \frac{\frac{27a^4}{32}}{a} = \frac{27a^3}{32}$$

$$m_2 = m_{NH} = \frac{\frac{27a^4}{32} - 0}{\frac{3a}{2} - 2a} = \frac{\frac{27a^4}{32}}{-\frac{a}{2}} = -\frac{27a^3}{16}$$



Grafik: Günther Weber

$$m_1 \cdot m_2 = -1$$

$$\frac{27a^3}{32} \cdot \left(-\frac{27a^3}{16}\right) = -1$$

$$a^6 = \frac{512}{729}$$

$$a = \sqrt[6]{\frac{512}{729}} = \sqrt[6]{\frac{2^6 \cdot 2^3}{3^6}} = \frac{2}{3}\sqrt[6]{2^3} = \frac{2}{3} \cdot 2^{\frac{3}{6}} = \frac{2}{3}\sqrt{2} = \approx 0{,}9428 \vee a = -\sqrt[6]{\frac{512}{729}} \notin D_a$$

Für $a = \frac{2}{3}\sqrt{2}$ wird das Dreieck rechtwinklig mit einem rechten Winkel beim Punkt H.

Aufgabenteil ii)

Bei einem gleichseitigen Dreieck müssen alle drei Seiten gleich lang sein.

Die Länge der Dreieckseite $\overline{N_tN}$ ist gleich $2a - 0{,}5a = 1{,}5a$,

die Dreieckseite $\overline{N_tH}$ hat die Länge $d(N_tH) = \sqrt{\left(\frac{3}{2}a - \frac{1}{2}a\right)^2 + \left(\frac{27}{32}a^4 - 0\right)^2}$ und

die Dreieckseite $\overline{N_tH}$ die Länge $d(NH) = \sqrt{\left(\frac{3}{2}a - 2a\right)^2 + \left(\frac{27}{32}a^4 - 0\right)^2}$

f) Öffnung des Gefäßes:

Die Stelle, an denen das Gefäß einen Durchmesser von 2 cm hat, ist gleich der Stelle, an der der Funktionswert 0,1 ist $(2\text{cm} \mathrel{\hat{=}} 0{,}2\text{dm})$.

solve(f(x)=0.1,x) x=0.512274 or x=1.974

Gleichsetzen des Funktionsterms mit 0,1 und Lösen der entstehenden Gleichung mit einem GTR/CAS liefert die Lösung $x \approx 0{,}51$ oder $x \approx 1{,}97$ Der Form des Gefäßes entnimmt man, dass das Gefäß bei $x \approx 0{,}51$ einen Durchmesser von 2 cm hat.

Standfläche des Gefäßes:

Der Flächeninhalt eines Kreises mit dem Radius r berechnet sich nach der Formel:

$$A = \pi \cdot r^2$$

$$36{,}95 = \pi \cdot r^2$$

$$r = \sqrt{\frac{36{,}95}{\pi}} \approx 3{,}43\,[\text{cm}]$$

solve(f(x)=0.343,x) x=0.839175 or x=1.89998

Gleichsetzen des Funktionsterms mit 0,343 und Lösen der entstehenden Gleichung mit einem GTR/CAS liefert die Lösung $x \approx 0{,}84$ oder $x \approx 1{,}9$

Der Form des Gefäßes entnimmt man, dass das Gefäß bei $x \approx 1{,}9$ einen Radius von 3,43 cm hat.

Aufgabenteil i)

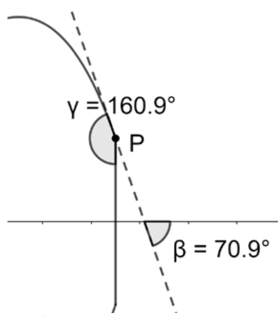
Ist $P(1{,}9 \mid f(1{,}9))$ der Punkt, in dem die Mantelfläche und die Grundfläche innen zusammenstoßen, so ist die Steigung des Graphen im Punkt P gleich dem Wert der 1. Ableitung an der Stelle $x = 1{,}9$

$$f'(x) = 3x^2 - 2x^3$$

$$f'(1{,}9) = 3 \cdot 1{,}9^2 - 2 \cdot 1{,}9^3 = -\frac{361}{125}$$

Die Steigung m der Tangente im Punkt P ist gleich der Steigung des Graphen im Punkt P; sie beträgt

$m = \tan^{-1}\left(-\frac{361}{125}\right) \approx -70{,}9^\circ$ (Winkel gegen den Uhrzeigersinn).



Grafik: Günther Weber

Im Dreieck ist die Größe eines Außenwinkels gleich der Summe der nicht anliegenden Innenwinkel. Mit dem Scheitelwinkel des 70,9° großen Winkels und dem rechten Winkel erhält man als Winkel, in dem die Grund- und Mantelfläche zusammenstoßen einen Winkel von $90^\circ + 70{,}9^\circ = 160{,}9^\circ$

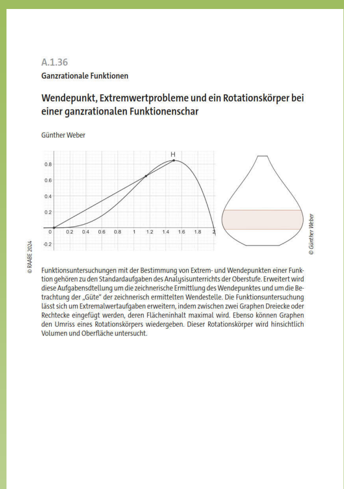
Unterrichtsmaterialien in digitaler und in gedruckter Form

Auszug aus:

Wendepunkt, Extremwertprobleme und ein Rotationskörper

Das komplette Material finden Sie hier:

School-Scout.de



A.1.36

Ganzrationale Funktionen

Wendepunkt, Extremwertprobleme und ein Rotationskörper bei einer ganzrationalen Funktionenschar

Günther Weber

Funktionsuntersuchungen mit der Bestimmung von Extrem- und Wendepunkten einer Funktion gehören zu den Standardaufgaben des Analysisunterrichts der Oberstufe. Erweitert wird diese Aufgabensdtellung um die zeichnerische Ermittlung des Wendepunktes und um die Betrachtung der „Güte" der zeichnerisch ermittelten Wendestelle. Die Funktionsuntersuchung lässt sich um Extremalwertaufgaben erweitern, indem zwischen zwei Graphen Dreiecke oder Rechtecke eingefügt werden, deren Flächeninhalt maximal wird. Ebenso können Graphen den Umriss eines Rotationskörpers wiedergeben. Dieser Rotationskörper wird hinsichtlich Volumen und Oberfläche untersucht.