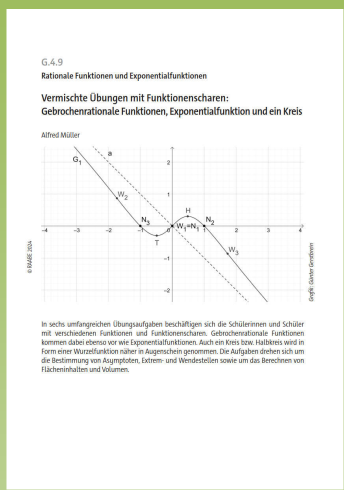
Unterrichtsmaterialien in digitaler und in gedruckter Form

Auszug aus:

Vermischte Übungen mit Funktionenscharen:

Das komplette Material finden Sie hier:

School-Scout.de



G.4.9

Rationale Funktionen und Exponentialfunktionen

Vermischte Übungen mit Funktionenscharen: Gebrochenrationale Funktionen, Exponentialfunktion und ein Kreis

Alfred Müller

In sechs umfangreichen Übungsaufgaben beschäftigen sich die Schülerinnen und Schüler mit verschiedenen Funktionen und Funktionenscharen. Gebrochenrationale Funktionen kommen dabei ebenso vor wie Exponentialfunktionen. Auch ein Kreis bzw. Halbkreis wird in Form einer Wurzelfunktion näher in Augenschein genommen. Die Aufgaben drehen sich um die Bestimmung von Asymptoten, Extrem- und Wendestellen sowie um das Berechnen von Flächeninhalten und Volumen.

3. Gegeben ist die Funktionenschar f_a durch ihre Gleichung $y = f_a(x) = \frac{x^2 + a}{x^2}$, $a \in \mathbb{R}^+$, Definitionsmenge $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und Graphen G_a.

   a) Zeichnen Sie den Graphen G_2 für a = 2 einschließlich seiner Asymptoten im Intervall $I =]-5; 5[$.

   b) Berechnen Sie den Inhalt $A(b)$ derjenigen Fläche, die der Graph G_2 zwischen x = 1 und x = b (b > 1) mit der x-Achse einschließt. Untersuchen Sie dann $\lim_{b \to \infty} A(b)$.

   c) Die Tangente im Kurvenpunkt $P(2|y_P)$ bildet zusammen mit den Koordinatenachsen ein Dreieck. Bestimmen Sie a so, dass dieses Dreieck extremalen Flächeninhalt besitzt. Welcher Art ist der Extremwert und wie groß ist dieser Flächeninhalt?

4. Gegeben ist die in $D = \mathbb{R}$ definierte Schar von Funktionen f_a durch ihre Gleichung $y = f_a(x) = \frac{x - ax^3}{x^2 + 1}$ mit dem Graphen G_a.

   a) Berechnen Sie den Parameterwert a so, dass der zugehörige Graph an der Stelle x = 1 die Steigung m = 2 besitzt.

   b) Nun sei a = 1.
   Berechnen Sie für den Graphen G_1 die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen und alle Asymptoten. Liegt eine Symmetrie vor? Geben Sie auch die Definitionsmenge für a = 1 an.

   c) Bestimmen Sie Art und Lage der Extremwerte sowie die Koordinaten der Wendepunkte.

   d) Zeichnen Sie den Graphen G_1 im Intervall $I = [-4; 4]$ (1 LE = 2 cm).

   e) Berechnen Sie die Koordinaten derjenigen Punkte des Graphen G_1, die von der schiefen Asymptote den größten Abstand besitzen.

5. Gegeben ist ein Kreis $k: x^2 + y^2 = r^2$, der in den Punkten $A(0{,}5r|y_1)$ und $B(0{,}5r|-y_1)$ von einer Parabel mit der Gleichung $y = \pm c \cdot \sqrt{d - x}$ berührt wird.

   a) Bestimmen Sie die Parameter c und d in Abhängigkeit von r.

   b) Wenn die Kreisfläche und das von Parabel und Kreis begrenzte sichelförmige Gebiet um die x-Achse rotiert, entsteht ein eiförmiger Körper, dessen Volumen sich aus einem Kugelsegment und einem Rotationsparaboloid zusammensetzt.
   Berechnen Sie das Volumen des Kugelsegments und des Paraboloids.
   Welches Volumen hat so ein „Ei“, wenn es 6 cm lang ist?

Lösungen

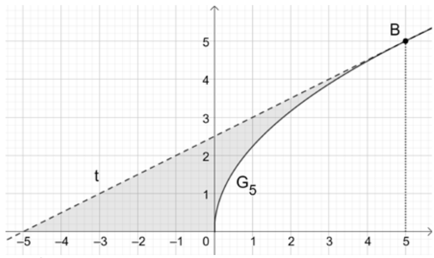
Aufgabe 1

$$y = f(x) = \sqrt{5x} = \sqrt{5} \cdot \sqrt{x}$$

a) $y_B = f(5) = 5 \Rightarrow B(5|5)$

$$f'(x) = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(5) = \frac{1}{2} \Rightarrow t: y = \frac{1}{2}(x-5)+5 = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$$

Nullstelle der Tangente bei $x = -5$



Grafik: Günter Gerstbrein

Flächenberechnung: Von der Fläche eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Hypothenuse vom Nullpunkt der Tangente (-5|0) zum Punkt B(5,5) verläuft (die Kathetenlängen betragen 10 LE und 5 LE) wird die Fläche unterhalb des Funktionsgraphen im Intervall [0;5] abgezogen:

$$A = A_\Delta - \int_0^5 f(x)dx = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 5 - \int_0^5 \sqrt{5}\sqrt{x}dx = 25 - \left[\sqrt{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot x^{\frac{3}{2}}\right]_0^5$$

$$= 25 - \sqrt{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot \sqrt{125} = \frac{25}{4} - \sqrt{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot 5\sqrt{5} = 25 - \frac{50}{3} = \frac{25}{3} \text{ FE}$$

b) $f_a(x) = \sqrt{ax} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{x} \wedge y_P = a \Rightarrow P(a|a)$

$$f_a'(x) = \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f_a'(a) = \frac{1}{2} \Rightarrow t_a: y = \frac{1}{2}(x-a)+a = \frac{1}{2}x + \frac{a}{2}$$

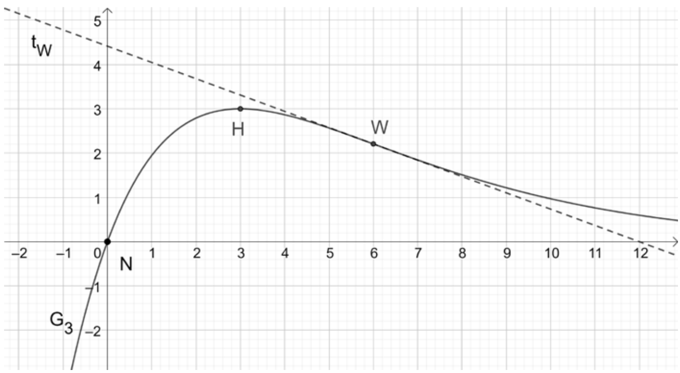
Nullstelle der Tangente bei $x = -a$.

c) Volumenberechnung:
Teilkörper 1: Kreiskegel mit Höhe a und Radius a an der Grundfläche

$$V_1 = \frac{1}{3}\left(\frac{a}{2}\right)^2 \pi \cdot a = \frac{a^3}{12}\pi \text{ VE}$$

Wertetabelle:

x	–2	0	2	3	4	6	8	10	12	14
$f_3(x)$	–10,6	0	2,79	3	2,86	2,21	1,51	0,97	0,60	0,36



Grafik: Günter Gerstbrein

d) Flächenberechnung mithilfe der partiellen Integration:

$$\int u(x)\cdot v'(x)dx = u(x)\cdot v(x) - \int u'(x)\cdot v(x)dx$$

$$A(b) = \int_0^b x\cdot e^{-\frac{x}{a}+1}dx =$$

$$\begin{array}{l} u = x \Rightarrow u' = 1 \\ v' = e^{-\frac{x}{a}+1} \Rightarrow v = -a\cdot e^{-\frac{x}{a}+1} \end{array}$$

$$= \left[x\cdot(-a)\cdot e^{-\frac{x}{a}+1}\right]_0^b - \int_0^b 1\cdot(-a)\cdot e^{-\frac{x}{a}+1}dx =$$

$$= \left[x\cdot(-a)\cdot e^{-\frac{x}{a}+1}\right]_0^b + \left[-a^2\cdot e^{-\frac{x}{a}+1}\right]_0^b = -ab\cdot e^{-\frac{b}{a}+1} - a^2\cdot e^{-\frac{b}{a}+1} + a^2\cdot e =$$

$$= -a(a+b)\cdot e^{-\frac{b}{a}+1} + a^2\cdot e$$

$$\Rightarrow \lim_{b\to\infty} A(b) = a^2\cdot e \text{ FE}$$

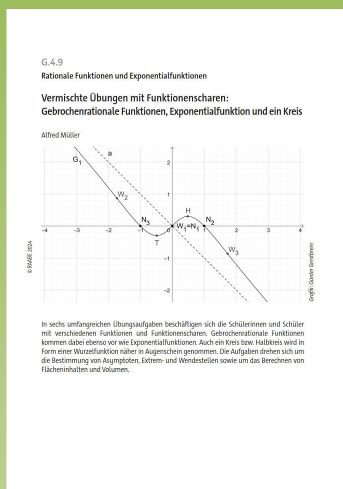
Der Flächeninhalt ist endlich, wenn a endlich ist.

Auszug aus:

Vermischte Übungen mit Funktionenscharen:

Das komplette Material finden Sie hier:

School-Scout.de



G.4.9

Rationale Funktionen und Exponentialfunktionen

Vermischte Übungen mit Funktionenscharen:
Gebrochenrationale Funktionen, Exponentialfunktion und ein Kreis

Alfred Müller

© RAABE 2024

Grafik: Günter Gerstbrein

In sechs umfangreichen Übungsaufgaben beschäftigen sich die Schülerinnen und Schüler mit verschiedenen Funktionen und Funktionenscharen. Gebrochenrationale Funktionen kommen dabei ebenso vor wie Exponentialfunktionen. Auch ein Kreis bzw. Halbkreis wird in Form einer Wurzelfunktion näher in Augenschein genommen. Die Aufgaben drehen sich um die Bestimmung von Asymptoten, Extrem- und Wendestellen sowie um das Berechnen von Flächeninhalten und Volumen.