Unterrichtsmaterialien in digitaler und in gedruckter Form

Auszug aus:

Stammfunktionen, Ortskurven, Flächen und Linearfaktoren

Das komplette Material finden Sie hier:

[School-Scout.de](https://www.school-scout.de)

P.1.19

Tests

Stammfunktionen, Ortskurven, Flächen und Linearfaktoren – Übungstests aus Analysis

Alfred Müller

$$\int \frac{3e^{x-1}}{\ln x^2}\,dx = ?$$

© AlpamayoPhoto / E+ / Getty Images Plus

Sechs Übungstests, die sich auch als Abiturvorbereitung nutzen lassen können, helfen Ihnen dabei, sich ein Bild über den Kenntnisstand Ihrer Schülerinnen und Schüler im Bereich der Analysis zu bilden. Alternativ können Sie die Tests auch den Jugendlichen zur Selbstkontrolle zur Verfügung stellen. Zeitvorgaben sowie ein Bewertungsschlüssel sorgen dabei für realistische Prüfungsbedingungen.

Anhand verschiedener Funktionsarten üben die Lernenden die Differenzial- und Integralrechnung. So kommen rationale Funktionen bzw. Funktionenscharen ebenso vor wie Logarithmen und Exponentialfunktionen. Auch Ortskurven der Extremstellen bei Funktionenscharen oder das Zerlegen einer Funktion in ihre Linearfaktoren sind Teil der Aufgaben.

Funktionenschar, Ortskurve und maximale Fläche

M 1

1. Gegeben ist die in $D=\mathbb{R}$ definierte Schar von Funktionen $f_a(x)=-\frac{1}{8}x^4+a^2x^2$ mit $a\in\mathbb{R}$ und ihren Graphen G_a. Untersuchen Sie die Graphen G_a auf Symmetrie sowie auf Schnittpunkte mit der x-Achse. **[3 BE]**
   a) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von a Art und Lage der Extrempunkte sowie die Abszissen der Wendepunkte. **[6 BE]**
   b) Zeigen Sie durch Rechnung, dass alle Graphen G_a nur einen Punkt gemeinsam haben, in dem sie sich berühren. **[2 BE]**
   c) Zeichnen Sie die Graphen G_1 und $G_{\sqrt{2}}$ für a = 1 bzw. $a=\sqrt{2}$ in ein rechtwinkliges Koordinatensystem unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse. **[6 BE]**
   d) Die gezeichneten Graphen von Teilaufgabe 1d) schließen im 1. Quadranten zusammen mit der x-Achse eine Fläche A ein. Bestimmen Sie deren Inhalt. **[6 BE]**

2. Ortskurve und Extremwert
   a) Ermitteln Sie eine Gleichung $y=g(x)$ derjenigen Kurve G_g, auf der alle Hochpunkte liegen und skizzieren Sie diese in das Koordinatensystem von Teilaufgabe 1d). Unter welchem Winkel α schneiden sich die Graphen G_1 und G_g im 1. Quadranten? **[5 BE]**
   b) Die Geraden mit den Gleichungen $x=u$ und $x=-u\ (0<u<2)$ schneiden den Graphen G_g in den Punkten A und D sowie den Graphen G_1 in den Punkten B und C. Für welchen Wert von u ist der Inhalt des Vierecks ABCD maximal? **[6 BE]**

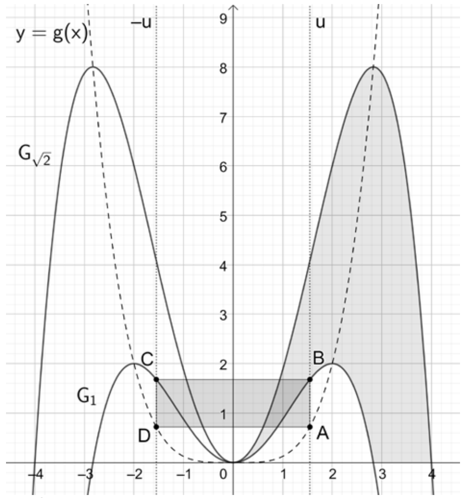
3. Durch $F(x)=\int_2^x f_1(t)\,dt, D_F=\mathbb{R}$ ist eine Integralfunktion zur Funktion f_1 definiert.
   a) Beschreiben Sie die Lage der drei Nullstellen der Funktion F durch geometrische Überlegungen. **[4 BE]**
   b) Geben Sie eine Funktionsgleichung von F in integralfreier Darstellung an. **[2 BE]**

Arbeitszeit: 45 Minuten **Gesamt: [40 BE]**

d) $f_1(x)=-\frac{1}{8}x^4+x^2, f_{\sqrt{2}}(x)=-\frac{1}{8}x^4+2x^2$

Wertetabelle und Graphen G_1, $G_{\sqrt{2}}$:

x	$f_1(x)$	$f_{\sqrt{2}}(x)$
0	0	0
±1	0,88	1,88
±2	2	6
$\pm 2\sqrt{2}$	0	8
±3	–1,33	7,88
±4	–16	0
±5	–53,13	–28,13



Grafik: Günter Gerstbrein

e) Flächenberechnung:

$$A=\int_0^4 f_{\sqrt{2}}(x)dx-\int_0^{2\sqrt{2}} f_1(x)dx=\left[-\frac{x^5}{40}+\frac{2x^3}{3}\right]_0^4-\left[-\frac{x^5}{40}+\frac{x^3}{3}\right]_0^{2\sqrt{2}}$$

$$=\left(-\frac{1024}{40}+\frac{128}{3}\right)-\left(-\frac{32\cdot\sqrt{32}}{40}+\frac{8\cdot\sqrt{8}}{3}\right)$$

$$=\left(-\frac{1024}{40}+\frac{128}{3}\right)-\left(-\frac{128\cdot\sqrt{2}}{40}+\frac{16\cdot\sqrt{2}}{3}\right)$$

$$=-128\cdot\left(\frac{8-\sqrt{2}}{40}\right)+16\cdot\left(\frac{8-\sqrt{2}}{3}\right)\approx 14{,}05\,\text{FE}$$

Aufgabe 2

Ortskurve und Extremwert

a) Ortskurve G_g:

$$x=2a\wedge y=2a^4$$

$$a=\frac{x}{2}\Rightarrow y=g(x)=\frac{1}{8}x^4\wedge g'(x)=\frac{1}{2}x^3$$

Schnittwinkel α:

$$m_g=g'(2)=4\wedge m_1=f_1'(2)=0\Rightarrow \tan\alpha=4\Rightarrow\alpha=75{,}96°$$

M 4 – Exponentialfunktion, Stammfunktion und Fläche

Aufgabe 1

$f(x) = 4x \cdot e^{-x}$

a) Schnittpunkte mit der x-Achse:

$f(x) = 0 : x = 0 \Rightarrow N(0|0)$

Grenzwerte:

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0 \wedge \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

b) Extremwerte und Wendepunkte:

$f'(x) = 4e^{-x} - 4xe^{-x} = 4e^{-x}(1-x)$

$f''(x) = -4e^{-x} - 4e^{-x} + 4xe^{-x} = 4e^{-x}(x-2)$

$f'(x) = 0 : x = 1 \wedge f(1) = \frac{4}{e} \wedge f''(1) < 0 \Rightarrow$ Hochpunkt $H\left(1 \,\middle|\, \frac{4}{e}\right)$

$f''(x) = 0 : x = 2 \wedge$ einfache Nullstelle $\Rightarrow$ Wendepunkt W

$f(2) = 8 \cdot e^{-2} = \frac{8}{e^2} \Rightarrow W\left(2 \,\middle|\, \frac{8}{e^2}\right)$

c) Schnittpunkt von G_g und G_f:

$g(x) = e^{-x} \wedge f(x) = g(x)$

$4xe^{-x} = e^{-x} \Rightarrow e^{-x}(4x-1) = 0$

$\Rightarrow x = \frac{1}{4} \wedge f\left(\frac{1}{4}\right) = e^{-\frac{1}{4}} \Rightarrow P\left(\frac{1}{4} \,\middle|\, e^{-\frac{1}{4}}\right)$

d) Tangente t:

$g'(x) = -e^{-x} \Rightarrow g'(0) = -1 \wedge B(0|1)$

$\Rightarrow t : y = -x + 1$

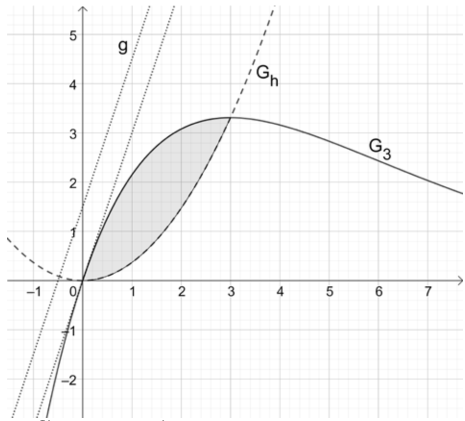
e) Wertetabelle:

x	–1	–0,5	0	1	2	3	4
f(x)	–10,8	–3,30	0	1,47	1,08	0,60	0,29
g(x)	2,72	1,65	1	0.37	0,14	0,05	0,02

e) $f_3(x) = 3x \cdot e^{-\frac{x}{3}}, h(x) = \frac{x^2}{e}$

Wertetabelle und Graphen G_3 und G_h:

x	$f_3(x)$	$h(x)$
–1	–4,19	0,37
–0,5	–1,27	0,09
0	0	0
1	2,15	0,37
2	3,08	1,47
3	3,31	3,31
4	3,16	5,89
5	2,83	2,83
6	2,44	2,44
7	2.04	2,04



Grafik: Günter Gerstbrein

Aufgabe 2

Stammfunktion, Integralfunktion und Fläche

a) $F_a(x) = -a^2(x+a)e^{-\frac{x}{a}} = -a^2xe^{-\frac{x}{a}} - a^3e^{-\frac{x}{a}}$

$$F_a{}'(x) = -a^2e^{-\frac{x}{a}} - a^2xe^{-\frac{x}{a}} \cdot \left(-\frac{1}{a}\right) - a^3e^{-\frac{x}{a}} \cdot \left(-\frac{1}{a}\right)$$

$$= -a^2e^{-\frac{x}{a}} + axe^{-\frac{x}{a}} + a^2e^{-\frac{x}{a}} = axe^{-\frac{x}{a}} = f_a(x)$$

Damit ist nachgewiesen, dass die Funktion F_a eine Stammfunktion zur Funktion f_a ist.

b) $G(x) = \int_0^x f_a(t)dt = \left[-a^2(t+a)e^{-\frac{t}{a}}\right]_0^x = -a^2(x+a)e^{-\frac{x}{a}} + a^3$

Prüfung des Minimums unter Verwendung der Ergebnisse von Teilaufgabe 1a) und 1b):

$G'(x) = f_a(x) = 0 \Rightarrow x = 0 \wedge G(0) = 0 \wedge G''(0) = f_a{}'(0) > 0$

$\Rightarrow$ Tiefpunkt E(0|0), relatives Minimum

c) Flächenberechnung

$$A = \int_0^3 (f_3(x) - h(x))dx = \left[-9(x+3)e^{-\frac{x}{3}} - \frac{1}{3e}x^3\right]_0^3 =$$

$$= \left(-\frac{54}{e} - \frac{9}{e}\right) - (-27) = 27 - \frac{63}{e} \approx 3{,}82\,\text{FE}$$

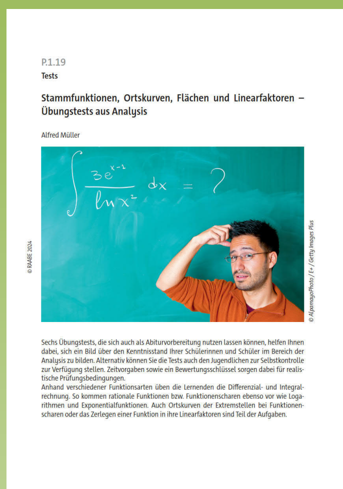
Unterrichtsmaterialien in digitaler und in gedruckter Form

Auszug aus:

Stammfunktionen, Ortskurven, Flächen und Linearfaktoren

Das komplette Material finden Sie hier:

School-Scout.de


P.1.19

Tests

Stammfunktionen, Ortskurven, Flächen und Linearfaktoren – Übungstests aus Analysis

Alfred Müller

© RAABE 2024

© AlpamayoPhoto / E+ / Getty Images Plus

Sechs Übungstests, die sich auch als Abiturvorbereitung nutzen lassen können, helfen Ihnen dabei, sich ein Bild über den Kenntnisstand Ihrer Schülerinnen und Schüler im Bereich der Analysis zu bilden. Alternativ können Sie die Tests auch den Jugendlichen zur Selbstkontrolle zur Verfügung stellen. Zeitvorgaben sowie ein Bewertungsschlüssel sorgen dabei für realistische Prüfungsbedingungen.

Anhand verschiedener Funktionsarten üben die Lernenden die Differenzial- und Integralrechnung. So kommen rationale Funktionen bzw. Funktionenscharen ebenso vor wie Logarithmen und Exponentialfunktionen. Auch Ortskurven der Extremstellen bei Funktionenscharen oder das Zerlegen einer Funktion in ihre Linearfaktoren sind Teil der Aufgaben.