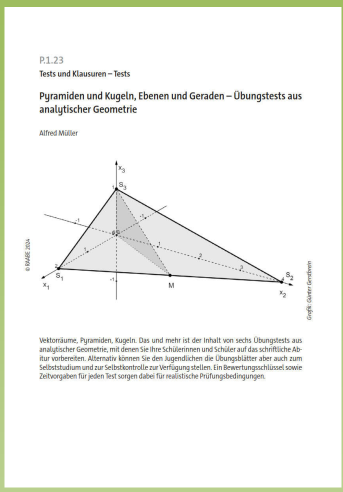
Unterrichtsmaterialien in digitaler und in gedruckter Form

Auszug aus:

Pyramiden und Kugeln, Ebenen und Geraden

Das komplette Material finden Sie hier:

School-Scout.de



P.1.23

Tests und Klausuren – Tests

Pyramiden und Kugeln, Ebenen und Geraden – Übungstests aus analytischer Geometrie

Alfred Müller

Grafik: Günter Gerstbrein

Vektorräume, Pyramiden, Kugeln. Das und mehr ist der Inhalt von sechs Übungstests aus analytischer Geometrie, mit denen Sie Ihre Schülerinnen und Schüler auf das schriftliche Abitur vorbereiten. Alternativ können Sie den Jugendlichen die Übungsblätter aber auch zum Selbststudium und zur Selbstkontrolle zur Verfügung stellen. Ein Bewertungsschlüssel sowie Zeitvorgaben für jeden Test sorgen dabei für realistische Prüfungsbedingungen.

M 2 Dreieck, Viereck und quadratische Pyramide

1. In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A(0|5|3)$, $B(0|0|b>0)$, $C(4|0|0)$, $P(6|5|-1{,}5)$ und $S(11|2{,}5|13{,}5)$ sowie die Ebene $F: 3x_1 - 30x_2 + 4x_3 - 12 = 0$ gegeben.
   a) Bestimmen Sie den Schnittpunkt D sowie den Schnittwinkel δ der Geraden g = AP mit der x_1x_2-Koordinatenebene. In welchem Verhältnis τ teilt der Punkt P die Strecke $[AD]$? Geben Sie in einer maßstäblichen Skizze die Lage der drei Punkte A, D und P an. **[7 BE]**
   b) Berechnen Sie b > 0 so, dass das Dreieck ABC rechtwinklig im Punkt B ist. Bestimmen Sie dann die Fläche $A_{\Delta ABC}$ des entstandenen Dreiecks ABC. **[4 BE]**
2. Nun sei b = 3.
   a) Die Punkte A, B und C bestimmen eine Ebene E. Geben Sie eine Gleichung von E in Normalenform an. Welche besondere Lage hat die Ebene E im Koordinatensystem? **[4 BE]**
   b) Zeigen Sie, dass der Punkt D aus Teilaufgabe 1a) auch durch Spiegelung des Punktes B an der Mitte M der Strecke $[AC]$ gewonnen werden kann. Was folgt daraus über die Lage des Punktes D und über das Viereck ABCD? Berechnen Sie dann die Fläche A_2 des Vierecks ABCD. **[5 BE]**
   c) Zeichnen Sie das Viereck ABCD und den Punkt P in ein räumliches Koordinatensystem. Welche besondere Lage hat die Gerade g aus Teilaufgabe 1a)? **[4 BE]**
   d) Bestimmen Sie eine Gleichung der Schnittgeraden s der Ebenen E und F sowie deren spitzen Schnittwinkel φ. **[4 BE]**
   e) Zeigen Sie, dass der Punkt S in der Ebene F liegt. Berechnen Sie dann den Schnittpunkt L des Lotes vom Punkt S auf die Ebene E sowie die Länge des Lotes $|\overrightarrow{SL}|$. **[4 BE]**
   f) Die Punkte A, B, C, D und S bilden eine Pyramide ABCDS. Berechnen Sie dann das Volumen der Pyramide auf zwei verschiedene Arten sowie ihre Oberfläche. Wie groß sind die Winkel α bzw. β der Seitenkanten bzw. Seitenflächen mit der Grundfläche ABCD? **[8 BE]**

Arbeitszeit: 50 Minuten **Gesamt: [40 BE]**

Gerade BM: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix} + \rho \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

D in BM:

$$\begin{array}{ll} 1. & 1 = -3 + 5\rho \\ 2. & -2a = -8 + 2\rho \\ 3. & a+1 = 1 + 4\rho \end{array}$$

$\text{aus 1.}: \rho = \frac{4}{5}$

$\text{in 2.}: -2a = -8 + \frac{8}{5} \Rightarrow 2a = \frac{32}{5} \Rightarrow a = \frac{16}{5}$

$\text{in 3.}: \frac{16}{5} + 1 = 1 + \frac{16}{5}$ w.A.

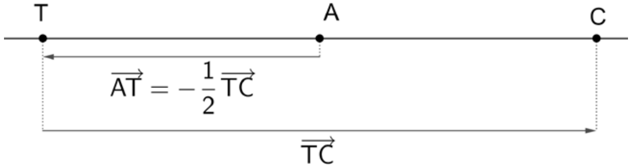
$\Rightarrow a = \frac{16}{5} = 3{,}2$

e) Teilpunkt T der Strecke $[AC]$ mit dem Verhältnis $\tau = -\frac{1}{2}$:

$$\overrightarrow{AT} = -\frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{TC}$$

$$\left.\begin{array}{llll} 1. & t_1 & = -\frac{1}{2}(4 - t_1) & \Rightarrow t_1 = -4 \\ 2. & t_2 + 8 & = -\frac{1}{2}(-4 - t_2) & \Rightarrow t_2 = -12 \\ 3. & t_3 - 4 & = -\frac{1}{2}(6 - t_3) & \Rightarrow t_3 = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow T(-4|-12|2)$$

Lage der drei Punkte:



Grafik: Günter Gerstbrein

vektoriell mithilfe des Spatprodukts:

$$V_{Pyr} = \frac{1}{3}\left|\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}\right)\circ\overrightarrow{AS}\right| = \frac{1}{3}\left|\begin{pmatrix}15\\0\\20\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}11\\-2,5\\10,5\end{pmatrix}\right| = \frac{1}{3}\cdot(165+210) = \frac{1}{3}\cdot 375 = 125\text{ VE}$$

Oberfläche der Pyramide:
Die Oberfläche der Pyramide besteht aus der quadratischen Grundfläche und vier gleich großen Dreiecksflächen.

$$A_{\Delta ABS} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AS}\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix}0\\-5\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}11\\-2,5\\10,5\end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix}-52,5\\0\\55\end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}\cdot\frac{5}{2}\left|\begin{pmatrix}-21\\0\\22\end{pmatrix}\right|$$

$$= \frac{5}{4}\sqrt{925} = \frac{25}{4}\sqrt{37}\text{FE}$$

$$\Rightarrow O_{Pyr} = 25 + 4\cdot\frac{25}{4}\sqrt{37} = 25 + 25\sqrt{37} = 25\cdot\left(1+\sqrt{37}\right) \approx 177,07\text{ FE}$$

Winkel α zwischen Seitenkante und Grundfläche:

$$\cos\alpha = \frac{\begin{pmatrix}11\\-2,5\\10.5\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}4\\-5\\-3\end{pmatrix}}{\sqrt{237,5}\cdot\sqrt{50}} = \frac{44+12,5-31,5}{\sqrt{237,5}\cdot 5\sqrt{2}} = \frac{25}{5\sqrt{475}} = \frac{5}{5\sqrt{19}} = \frac{1}{\sqrt{19}} \Rightarrow \alpha = 76,74°$$

Winkel β zwischen Seitenfläche und Grundfläche:
Der gesuchte Winke β wird im rechtwinkligen Dreieck M_1MS elementargeometrisch berechnet. Da die quadratische Grundfläche eine Seitenlänge von 5 LE hat, ist $\overline{M_1M} = 2,5\text{ LE}$. Die Lothöhe $\overline{MS} = 15\text{ LE}$ wurde in Aufgabe 2e) bestimmt.
Damit gilt:

$$\tan\beta = \frac{15}{2,5} = 6 \Rightarrow \beta = 80,54°$$

Alternativ:
Wenn erkannt wird, dass der Punkt S in der Ebene F liegt, folgt daraus, dass der gesuchte Winkel β dem in Aufgabe 2d) berechneten spitzen Winkel zwischen den beiden Ebenen entspricht, da die Grundfläche ABCD in der Ebene E und die Dreiecksfläche BCS in der Ebene F liegt.

Ein Normalenvektor der Ebene E_2 wird mithilfe des Vektorprodukts der beiden Richtungsvektoren bestimmt. Es gilt:

$$\overrightarrow{n_{E_2}} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} = -1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$E_2 : \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \circ \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 6 + 3 + 9 = 18 \Rightarrow E_2 : 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 18 = 0$$

c) Schnittpunkte der Ebene E_2 mit den Koordinatenachsen:

x_1-Achse: $x_2 = x_3 = 0 : x_1 = 9 \Rightarrow S_1(9|0|0)$

x_2-Achse: $x_1 = x_3 = 0 : x_2 = 6 \Rightarrow S_2(0|6|0)$

x_3-Achse: $x_1 = x_2 = 0 : x_3 = 6 \Rightarrow S_3(0|0|6)$

Beachten Sie: Die Pyramide $S_1S_2S_3O$ setzt sich aus vier Dreiecken zusammen, von denen drei rechtwinklige Dreiecke sind.

Volumen:

elementargeometrisch:

$$V_{Pyr} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \left|\overrightarrow{OS_1}\right| \cdot \left|\overrightarrow{OS_2}\right| \cdot \left|\overrightarrow{OS_3}\right| = \frac{1}{6} \cdot 9 \cdot 6 \cdot 6 = 54 \text{ VE}$$

vektoriell mithilfe des Spatprodukts:

$$V_{Pyr} = \frac{1}{6} \left| \left(\overrightarrow{OS_1} \times \overrightarrow{OS_2} \right) \circ \overrightarrow{OS_3} \right| = \frac{1}{6} \left| \left[\begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{6} \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 54 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \right| = 54 \text{ VE}$$

Oberfläche:

$$A_{\Delta OS_1S_2} = \frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{OS_1}\right| \cdot \left|\overrightarrow{OS_2}\right| = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 6 = 27 \text{ FE}$$

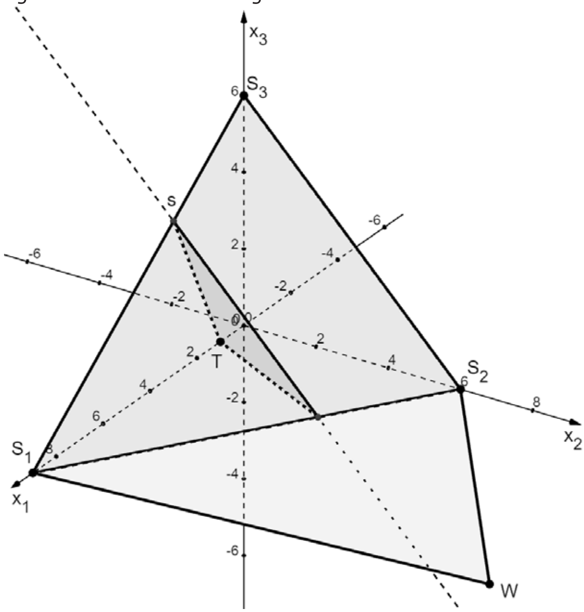
$$A_{\Delta OS_1S_3} = \frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{OS_1}\right| \cdot \left|\overrightarrow{OS_3}\right| = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 6 = 27 \text{ FE}$$

$$A_{\Delta OS_2S_3} = \frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{OS_2}\right| \cdot \left|\overrightarrow{OS_3}\right| = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 = 18 \text{ FE}$$

$$A_{\Delta S_1S_2S_3} = \frac{1}{2} \left| \overrightarrow{S_1S_2} \times \overrightarrow{S_1S_3} \right| = \frac{1}{2} \left| \begin{pmatrix} -9 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -9 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \left| \begin{pmatrix} 36 \\ 54 \\ 54 \end{pmatrix} \right| = \frac{18}{2} \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \right| = 9\sqrt{22} \approx 42{,}21 \text{ FE}$$

$$\Rightarrow O_{Pyr} = 27 + 27 + 18 + 9\sqrt{22} \approx 114{,}21 \text{ FE}$$

d) Pyramide im Koordinatensystem:



Grafik: Günter Gerstbrein

e) Schnittgerade s zwischen den Ebenen E_1 und E_2:

$$\begin{aligned}
&1.\quad 2x_1 - x_2 - x_3 - 2 = 0\\
&2.\quad 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 18 = 0\\
&x_2 = 0 \wedge 1. - 2.: -4x_3 + 16 = 0 \Rightarrow x_3 = 4 \wedge x_1 = 3 \Rightarrow T_1(3|0|4)\\
&x_3 = 0 \wedge 1. - 2.: -4x_2 + 16 = 0 \Rightarrow x_2 = 4 \wedge x_1 = 3 \Rightarrow T_2(3|4|0)\\
&s = T_1T_2: \vec{x} = \begin{pmatrix}3\\0\\4\end{pmatrix} + \rho' \cdot \begin{pmatrix}0\\4\\-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\0\\4\end{pmatrix} + \rho \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Die Gerade s liegt in der Ebene $x_1 = 3$, d. h. sie liegt in einer Parallelebene zur x_2x_3-Ebene.

Schnittwinkel φ:

$$\cos\varphi = \left|\frac{\overrightarrow{n_{E_1}} \circ \overrightarrow{n_{E_2}}}{\left|\overrightarrow{n_{E_1}}\right| \cdot \left|\overrightarrow{n_{E_2}}\right|}\right| = \left|\frac{\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}2\\3\\3\end{pmatrix}}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{22}}\right| = \left|\frac{4-3-3}{\sqrt{132}}\right| = \frac{2}{2\sqrt{33}} = \frac{1}{\sqrt{33}} \Rightarrow \varphi = 79{,}98^\circ$$

b) Der Mittelpunkt R liegt für $\mu = 1$ auch auf der Geraden h, d. h. die Gerade h schneidet den Kreis in einem Durchmesser. Die Sehne hat damit folgende Länge d:
$d = 2\rho = 8\sqrt{2} \approx 11{,}31\,\text{LE}$.

c) $t_a : \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \nu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ a \end{pmatrix}$, $K : \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix}\right]^2 = 81$

t_a ist eine Tangente an die Kugel K, wenn es genau einen gemeinsamen Punkt gibt.

$$t_a \text{ in } K : (6+\nu)^2 + (-3+a\nu)^2 + (6+a\nu)^2 = 81$$
$$36 + 12\nu + \nu^2 + 9 - 6a\nu + a^2\nu^2 + 36 + 12a\nu + a^2\nu^2 - 81 = 0$$
$$\nu^2(2a^2+1) + \nu(12+6a) = 0$$
$$\nu\left[(2a^2+1)\nu + (12+6a)\right] = 0 \Rightarrow \nu = 0 \vee \nu = \frac{12+6a}{2a^2+1}$$

Da zur Berührung eine doppelte Nullstelle vorliegen muss, muss auch die zweite Lösung den Wert 0 haben. Das ist für $12 + 6a = 0 \Rightarrow a = -2$ der Fall.

Aufgabe 3

$m : \vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix} + \tau \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

a) Schnittwinkel φ und Schnittpunkt Q zwischen der Geraden m und der Ebene E:
Der gesuchte Winkel φ ist derjenige Winkel, der den spitzen Winkel zwischen dem Normalenvektor der Ebene E und dem Richtungsvektor der Geraden m zu 90° ergänzt.

$$\cos(90^\circ - \varphi) = \sin\varphi\Phi \frac{\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}{7 \cdot \sqrt{66}} = \frac{48 - 2 + 3}{7\sqrt{66}} = \frac{49}{7\sqrt{66}} = \frac{7}{\sqrt{66}} \Rightarrow \varphi = 59{,}50^\circ$$

Schnittpunkt Q:

m in E:
$$54 + 48\tau + 14 - 2\tau + 9 + 3\tau - 28 = 0$$
$$49\tau = -49 \Rightarrow \tau = -1 \Rightarrow Q(1|-8|2)$$

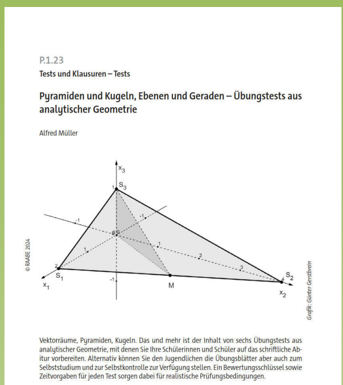
Unterrichtsmaterialien in digitaler und in gedruckter Form

Auszug aus:

Pyramiden und Kugeln, Ebenen und Geraden

Das komplette Material finden Sie hier:

School-Scout.de


P.1.23

Tests und Klausuren – Tests

Pyramiden und Kugeln, Ebenen und Geraden – Übungstests aus analytischer Geometrie

Alfred Müller

© RAABE 2024

Grafik: Günter Gerstbrein

Vektorräume, Pyramiden, Kugeln. Das und mehr ist der Inhalt von sechs Übungstests aus analytischer Geometrie, mit denen Sie Ihre Schülerinnen und Schüler auf das schriftliche Abitur vorbereiten. Alternativ können Sie den Jugendlichen die Übungsblätter aber auch zum Selbststudium und zur Selbstkontrolle zur Verfügung stellen. Ein Bewertungsschlüssel sowie Zeitvorgaben für jeden Test sorgen dabei für realistische Prüfungsbedingungen.