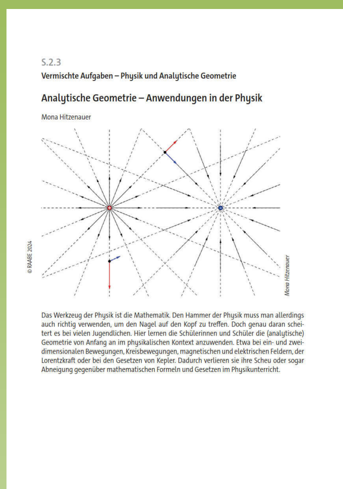
Unterrichtsmaterialien in digitaler und in gedruckter Form

Auszug aus:

Analytische Geometrie

Das komplette Material finden Sie hier:

School-Scout.de



S.2.3

Vermischte Aufgaben – Physik und Analytische Geometrie

Analytische Geometrie – Anwendungen in der Physik

Mona Hitzenauer

© RAABE 2024

Mona Hitzenauer

Das Werkzeug der Physik ist die Mathematik. Den Hammer der Physik muss man allerdings auch richtig verwenden, um den Nagel auf den Kopf zu treffen. Doch genau daran scheitert es bei vielen Jugendlichen. Hier lernen die Schülerinnen und Schüler die (analytische) Geometrie von Anfang an im physikalischen Kontext anzuwenden. Etwa bei ein- und zweidimensionalen Bewegungen, Kreisbewegungen, magnetischen und elektrischen Feldern, der Lorentzkraft oder bei den Gesetzen von Kepler. Dadurch verlieren sie ihre Scheu oder sogar Abneigung gegenüber mathematischen Formeln und Gesetzen im Physikunterricht.

Auf einen Blick

Rechnen mit Vektoren

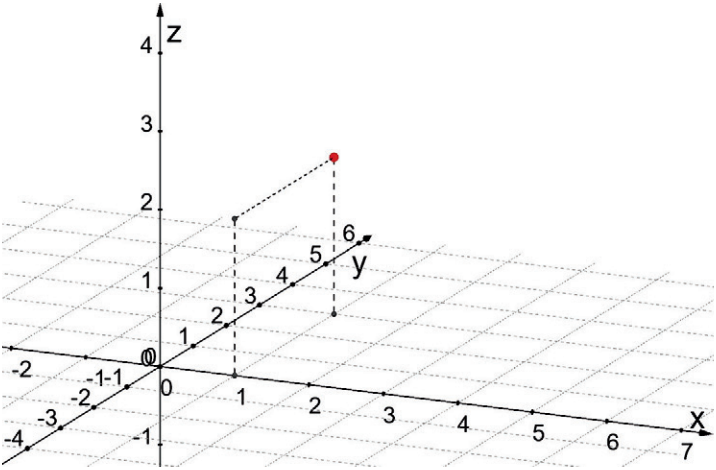
M 1 Koordinatensysteme
M 2 Vektoren
M 3 Vektoren und die Grundrechenarten
M 4 Skalar- und Kreuzprodukt

Kurven

M 5 Parameterdarstellung einer Kurve
M 6 Kreis
M 7 Ellipse

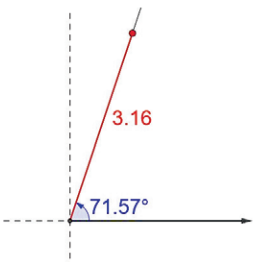
Erklärung zu den Symbolen

Dieses Symbol markiert differenziertes Material. Wenn nicht anders ausgewiesen, befinden sich die Materialien auf mittlerem Niveau.		
leichtes Niveau	mittleres Niveau	schwieriges Niveau
Zusatzaufgabe	Alternative	



Es sind auch noch mehr als drei Achsen möglich, die man allerdings nicht mehr so einfach graphisch darstellen kann. Wenn die vierte Achse etwa die Zeit ist, kann man z. B. eine dreidimensionale Bewegung im zeitlichen Verlauf als Animation umsetzen.

Polarkoordinaten



Ein weiteres, viel genutztes Koordinatensystem in der Physik ist das der Polarkoordinaten. Auch damit lassen sich Punkte in einer Ebene beschreiben und graphisch darstellen. Statt mit zwei (senkrechten) Achsen arbeitet man hier mit einem Winkel und dem Abstand zum Pol (siehe linke Abbildung). Man misst positive Winkel gegen den Uhrzeigersinn von einer Halbachse, die im Pol beginnt, negative Winkel mit dem Uhrzeigersinn. In der Abbildung ist der Punkt (1 | 3) (kartesische Koordinaten) in Polarkoordinaten dargestellt. Man schreibt für den Punkt in Polarkoordinaten erst den Radius (Abstand zum Pol), dann das Winkelmaß ebenfalls in runde Klammern, z. B. (3,16 | 71,57°).

Auch hier kann man das Koordinatensystem mit einer Hochachse, die auf dem Pol senkrecht zur Polarebene steht, erweitern. Dreidimensionale Bewegungen im Raum kann man ebenso wie beim kartesischen Koordinatensystem etwa mit einer Animation/Simulation graphisch veranschaulichen.

Aufgaben (M 2)

Hinweis: Beachten Sie bei der Angabe Ihres Ergebnisses die geltenden Ziffern.

1. **Berechnen** Sie den Geschwindigkeitsunterschied $\Delta\vec{v}$ eines Körpers mit $\vec{v}(1\,\text{s}) = \begin{pmatrix} 1\frac{\text{m}}{\text{s}} \\ 3\frac{\text{m}}{\text{s}} \end{pmatrix}$ und $\vec{v}(5\,\text{s}) = \begin{pmatrix} -2\frac{\text{m}}{\text{s}} \\ 3\frac{\text{m}}{\text{s}} \end{pmatrix}$ im Intervall [1 s; 5 s].

   Tipp: Hier können Sie Ihre Rechenschritte und Lösung überprüfen:
   https://raabe.click/phy-geo-M2-A1

2. Der Geschwindigkeitsvektor eines Pendels im Laufe der Zeit t ist

$$\begin{pmatrix} 2\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2s \cdot t}\right) \\ 2\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2s \cdot t}\right) \end{pmatrix}$$

   Berechnen Sie den Geschwindigkeitsunterschied zwischen Sekunde eins und zwei.
   Tipp: Hier können Sie Ihre Rechenschritte und Lösung überprüfen:
   https://raabe.click/phy-geo-M2-A2

3. Ein Elektron bewegt sich von Sekunde null bis drei gleichförmig vom Ort (0 m | 2 m) zum Ort (–3 m | 4 m). **Berechnen** Sie den Geschwindigkeitsvektor im Intervall [0, 3].
   Tipp: Hier können Sie Ihre Rechenschritte und Lösung überprüfen:
   https://raabe.click/phy-geo-M2-A3

4. Zwei nicht homogene magnetische Felder überlagern sich unabhängig nach dem Superpositionsprinzip. Die magnetischen Flussdichten am Ort (0 | 1 | 3) sind

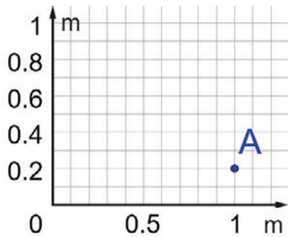
$$\vec{B}_1 = \begin{pmatrix} 0{,}2\,\text{mT} \\ -0{,}01\,\text{mT} \\ 1{,}02\,\text{mT} \end{pmatrix} \text{ und } \vec{B}_2 = \begin{pmatrix} 0{,}8\,\text{mT} \\ 0{,}001\,\text{T} \\ 2 \cdot 10^{-3}\,\text{T} \end{pmatrix}.$$

   Berechnen Sie die resultierende magnetische Flussdichte am Ort (0 | 1 | 3).
   Tipp: Hier können Sie Ihre Rechenschritte und Lösung überprüfen:
   https://raabe.click/phy-geo-M2-A4

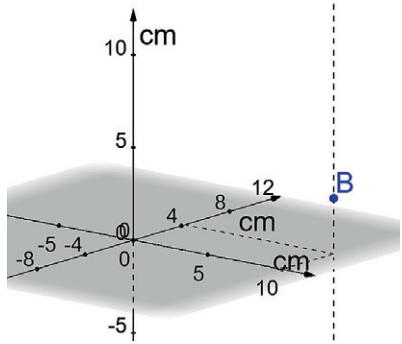
Lösung (M 1)

1. Passende Darstellungen im Koordinatensystem (Lösungsvorschläge).

a)

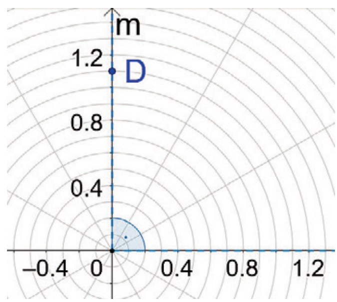


b)

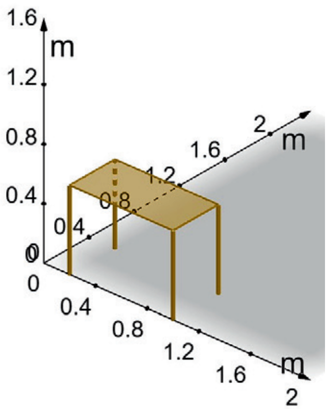


c)

d)



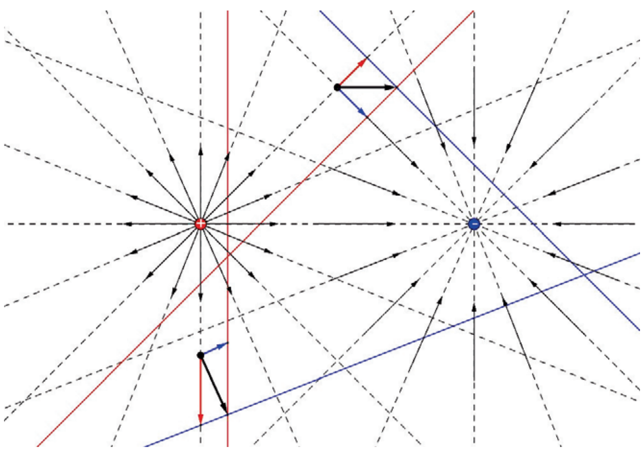
e)



4. Die resultierende magnetische Flussdichte überlagerter Felder berechnet sich über die Addition der Flussdichten am jeweiligen Ort. Für den Ort (0 | 1 | 3) gilt daher:

$$\begin{aligned}\vec{B} &= \vec{B}_1 + \vec{B}_2 \\ &= \begin{pmatrix} 0{,}2\,\text{mT} \\ -0{,}01\,\text{mT} \\ 1{,}02\,\text{mT} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0{,}8\,\text{mT} \\ 0{,}001\,\text{T} \\ 2\cdot 10^{-3}\,\text{T} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0{,}2\,\text{mT} + 0{,}8\,\text{mT} \\ -0{,}01\,\text{mT} + 1\,\text{mT} \\ 1{,}02\,\text{mT} + 2\,\text{mT} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\,\text{mT} \\ 0{,}99\,\text{mT} \\ 3{,}02\,\text{mT} \end{pmatrix} \\ &\approx \begin{pmatrix} 1\,\text{mT} \\ -1\,\text{mT} \\ 3\,\text{mT} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

5. Die Vektoren (blau und rot) addiert man graphisch, indem man z. B. das zugehörige Parallelogramm zeichnet. Die Diagonale ist dann jeweils der Lösungsvektor.
Man kann ebenso an die Spitze des einen Vektors den Fuß des anderen Vektors setzen und erhält den Lösungsvektor vom Fußpunkt des ersten Vektors bis zur Spitze des zweiten Vektors.



7. Die Bahnkurve des Nullfelds ist ein Kreis mit dem Radius $|\vec{r}|$ um den Ort M(0,10 m | 0,40 m). Der Radius lässt sich berechnen aus dem Fußpunkt (Mittelpunkt des Kreises) und der Spitze S_0 (Ort der Null zum Zeitpunkt null):

$$\vec{r} = \vec{s}_0 - \vec{m} = \begin{pmatrix} 0{,}40\,\text{m} \\ 0{,}80\,\text{m} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0{,}10\,\text{m} \\ 0{,}40\,\text{m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}30\,\text{m} \\ 0{,}40\,\text{m} \end{pmatrix}.$$

Sein Betrag ist damit

$$|\vec{r}| = \sqrt{0{,}30^2\,\text{m}^2 + 0{,}40^2\,\text{m}^2} = 0{,}50\,\text{m}\,.$$

Die Punkte der Kreislinie berechnen sich also mit

$$x = 0{,}1 + 0{,}5 \cdot \cos(\varphi) \qquad\qquad 0 \le \varphi < 2\pi$$
$$y = 0{,}4 + 0{,}5 \cdot \sin(\varphi).$$

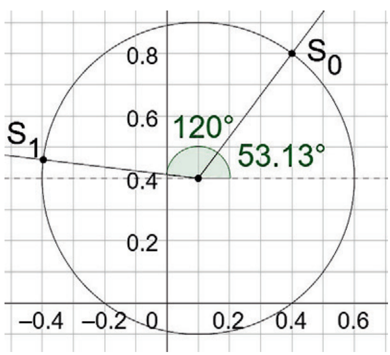
Das Feld der Null befindet sich am Ort $S_1(0{,}40\,\text{m}|0{,}80\,\text{m})$ zum Zeitpunkt null. Zugehörigen Winkel berechnen:

$$0{,}4 = 0{,}1 + 0{,}5 \cdot \cos(\varphi_0) \;\Rightarrow\; \frac{0{,}3}{0{,}5} = \cos(\varphi_0) \;\Rightarrow\; \cos^{-1}\left(\frac{0{,}3}{0{,}5}\right) = \varphi_0 \;\Rightarrow\; \varphi_0 \approx 53{,}13^\circ$$
$$0{,}8 = 0{,}4 + 0{,}5 \cdot \sin(\varphi_0) \;\Rightarrow \frac{0{,}4}{0{,}5} = \sin(\varphi_0) \;\Rightarrow\; \sin^{-1}\left(\frac{0{,}4}{0{,}5}\right) = \varphi_0 \;\Rightarrow\; \varphi_0 \approx 53{,}13^\circ$$

Das Roulette-Rad dreht sich in drei Sekunden einmal komplett herum, das heißt nach einer Sekunde ist es um den Winkel $120^\circ = \frac{2}{3}\pi$ weiter gedreht.
Zugehörigen Ort S_1 berechnen:

$$x = 0{,}1 + 0{,}5 \cdot \cos(53{,}13^\circ + 120^\circ) = -0{,}396410\ldots \approx -0{,}40\,\text{m}$$
$$y = 0{,}4 + 0{,}5 \cdot \sin(53{,}13^\circ + 120^\circ) = 0{,}459808\ldots \approx 0{,}46\,\text{m}$$

Das Feld der Null ist also etwa am Ort $S_1(-0{,}40\,\text{m}|0{,}46\,\text{m})$ zum Zeitpunkt eine Sekunde.



Winkelunterschied für den 03. Juli (184. Tag) und 30. Juli (211. Tag):

$$\begin{aligned}\Delta\varphi &= \varphi(211)-\varphi(184)\\ &= 0{,}033\cdot\sin\left(\frac{2\pi}{365}\cdot(211-3)\right)+0{,}017\cdot 211+0{,}0017\\ &\quad -0{,}033\cdot\sin\left(\frac{2\pi}{365}\cdot(184-3)\right)+0{,}017\cdot 184+0{,}0017\\ &\approx 0{,}44412\approx 25{,}45^\circ\end{aligned}$$

5. In den 27 Tagen im Januar überstreicht die Erde einen größeren Winkel als in den 27 Tagen im Juli, die Winkelgeschwindigkeit ist also im Januar größer als im Juli.

6. Umstellen der Formel nach T_2:

$$\frac{(T_1)^2}{(a_1)^3}=\frac{(T_2)^2}{(a_2)^3} \Leftrightarrow \frac{(T_1)^2\cdot(a_2)^3}{(a_1)^3}=(T_2)^2 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{(T_1)^2\cdot(a_2)^3}{(a_1)^3}}=T_2$$

Da die Umlaufzeiten und die Längen der großen Halbachsen positiv sind, ist auch der Term unter der Wurzel stets positiv. Die Umlaufzeit T_2 ist auch immer positiv, daher genügt es, nur die positive Wurzel zu betrachten.
Man setzt nun für T_1 die Umlaufdauer der Erde (365 Tage) ein, für a_1 die Länge der großen Halbachse der Erdumlaufbahn (149 598 023 km) und für a_2 die große Halbachse der Umlaufbahn des Mars (228 000 000 km):

$$T_2=\sqrt{\frac{(365\,\mathrm{d})^2\cdot(228000000\,\mathrm{km})^3}{(149598023\,\mathrm{km})^3}}=686{,}762...\,\mathrm{d}\approx 687\,\mathrm{d}\,.$$

Der Mars umläuft die Sonne in etwa 687 Erdentagen.

7. Umstellen der Formel nach a_2:

$$\frac{(T_1)^2}{(a_1)^3}=\frac{(T_2)^2}{(a_2)^3} \qquad \Leftrightarrow \frac{(T_1)^2}{(a_1)^3}\cdot(a_2)^3=(T_2)^2 \qquad \left|\cdot\frac{(a_1)^3}{(T_1)^2}\right.$$

$$(a_2)^3=\frac{(T_2)^2\cdot(a_1)^3}{(T_1)^2} \qquad \Leftrightarrow a_2=\sqrt[3]{\frac{(T_2)^2\cdot(a_1)^3}{(T_1)^2}}$$

Einsetzen von $T_1=365\,\mathrm{d}$, $a_1=149598023\,\mathrm{km}$ und $T_2=88{,}0\,\mathrm{d}$

$$a_2=\sqrt[3]{\frac{(88{,}0\,\mathrm{d})^2\cdot(149598023\,\mathrm{km})^3}{(365\,\mathrm{d})^2}}=57\,949\,860{,}206...\,\mathrm{km}\approx 57{,}9\,\mathrm{Mio\,km}$$

SCHOOL-SCOUT.DE

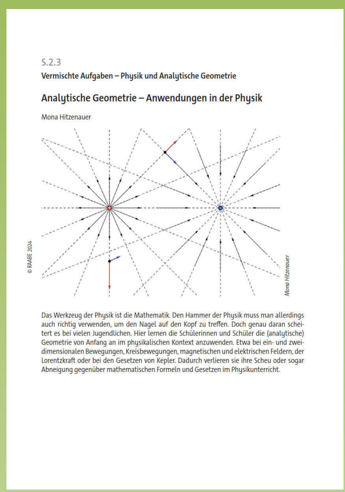
Unterrichtsmaterialien in digitaler und in gedruckter Form

Auszug aus:

Analytische Geometrie

Das komplette Material finden Sie hier:

School-Scout.de


S.2.3

Vermischte Aufgaben – Physik und Analytische Geometrie

Analytische Geometrie – Anwendungen in der Physik

Mona Hitzenauer

© RAABE 2024

Mona Hitzenauer

Das Werkzeug der Physik ist die Mathematik. Den Hammer der Physik muss man allerdings auch richtig verwenden, um den Nagel auf den Kopf zu treffen. Doch genau daran scheitert es bei vielen Jugendlichen. Hier lernen die Schülerinnen und Schüler die (analytische) Geometrie von Anfang an im physikalischen Kontext anzuwenden. Etwa bei ein- und zweidimensionalen Bewegungen, Kreisbewegungen, magnetischen und elektrischen Feldern, der Lorentzkraft oder bei den Gesetzen von Kepler. Dadurch verlieren sie ihre Scheu oder sogar Abneigung gegenüber mathematischen Formeln und Gesetzen im Physikunterricht.