

# SCHOOL-SCOUT.DE

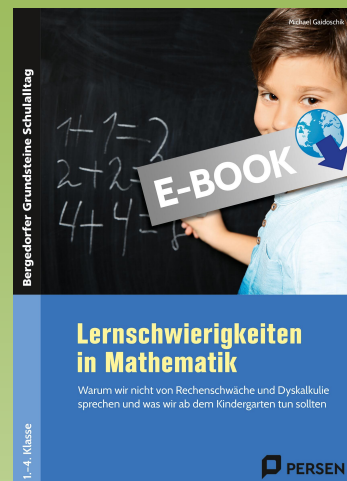
Unterrichtsmaterialien in digitaler und in gedruckter Form

## Auszug aus:

*Lernschwierigkeiten in Mathematik*

Das komplette Material finden Sie hier:

[School-Scout.de](http://School-Scout.de)



Vorwort zur Neufassung .....	5
1 Einleitung .....	7
2 Drei Bereiche, die für das Weiterlernen in Mathematik zentral sind. ....	8
2.1 Problembereich I: Vorstellungen und Denkweisen zu Zahlen bis 10 .....	8
2.2 Problembereich II: Vorstellungen und Denkweisen zu mehrstelligen Zahlen .....	10
2.3 Problembereich III: Vorstellungen und Denkweisen zu Grundrechenarten .....	12
2.4 Die innere Lernhierarchie der Mathematik und ihre Konsequenzen .....	13
3 Warum wir nicht von „Rechenschwäche“ und „Dyskalkulie“ sprechen sollten .....	15
3.1 Mathematik-didaktische und psychologische Zugänge: eine Abgrenzung. ....	15
3.2 Warum „Nachteilsausgleiche“ zu kurz greifen .....	16
3.3 Konsequenzen für Lehrkräfte .....	17
4 Frühes Mathematiklernen und mögliche frühe Schwierigkeiten. ....	19
4.1 Grundsätzliches zur frühen mathematischen Bildung .....	19
4.2 Zählen .....	21
4.3 Anzahlen erfassen, ohne zählen zu müssen .....	27
4.4 Vergleichen von Mengen und Anzahlen .....	32
4.5 Zur Bedeutung des Ziffern-Lernens vor Schuleintritt .....	37
5 Typische Schwierigkeiten im Lauf der Schuljahre .....	40
5.1 Erstes Schuljahr .....	40
5.2 Zweites Schuljahr. ....	49
5.3 Drittes und viertes Schuljahr .....	57
5.4 Nach der Grundschule .....	65
6 Anhaltende Lernschwierigkeiten vermeiden, überwinden, mildern: Grundsätzliches .....	69
7 Zahlen verstehen .....	72
7.1 Zählen und Anzahlen vergleichen .....	72
7.2 Verknüpfung der Zahlwortreihe mit dem Vergleichen .....	73
7.3 Anzahlen ermitteln, ohne zu zählen – Zahlen als Zusammensetzungen .....	73
7.4 Addieren und Subtrahieren: <i>Von Anfang an</i> nicht-zählend! .....	81

7.5	Teile-Ganzes-Beziehungen bis 10 vervollständigen .....	86
7.6	Warum Ableiten so wichtig ist und wie wir erreichen, dass Kinder ableiten .....	88
7.7	Automatisierendes Üben .....	95
<b>8 Das dezimale Stellenwertsystem verstehen .....</b>		
8.1	Bündeln und Entbündeln .....	101
8.2	Positionsprinzip .....	103
8.3	Zahlen sprechen, schreiben, gedanklich einordnen .....	106
8.4	Rechnen als Anwendung und Festigung von Stellenwertverständnis .....	107
8.5	Nutzen und Gefahren des Wechsels von Arbeitsmitteln .....	110
8.6	Gezielter Aufbau von räumlich-linearen Zahlvorstellungen .....	112
8.7	Noch einmal abschließend zu Zahlenräumen in Unterricht und Förderung .....	115
<b>9 Mit Verständnis rechnen .....</b>		
9.1	Addition und Subtraktion .....	117
9.2	Multiplikation .....	118
9.3	Division .....	127
<b>10 Zur Weiterarbeit an inhaltlichen und allgemeinen Kompetenzen .....</b>		
10.1	Arithmetik ab dem 3. Schuljahr .....	131
10.2	Größen .....	133
10.3	Modellieren, Kommunizieren, Darstellen und Argumentieren .....	134
10.4	Problemlösen – gerade mit Kindern, die Probleme mit Mathematik haben .....	136
<b>11 Förderung außerhalb des Klassenverbands .....</b>		
<b>12 Was Eltern tun können und was sie besser nicht tun sollten .....</b>		
<b>13 Weiterführende Hinweise .....</b>		

## 2 Drei Bereiche, die für das Weiterlernen in Mathematik zentral sind

### 2.1 Problembereich I: Vorstellungen und Denkweisen zu Zahlen bis 10

Eine wesentliche Grundlage für den erfolgreichen Einstieg in die Welt der natürlichen Zahlen<sup>1</sup> besteht darin, diese Zahlen als *Anzahlen* und damit als *aus Teilen zusammengesetzte Ganze* zu verstehen. Das ist nicht selbstverständlich.



**Kinder im Kindergarten verstehen Zahlen häufig als Namen für einzelne Gegenstände, die man beim Abzählen an einer bestimmten Position antrifft.**

So verstanden, ist Sieben zum Beispiel der Name für das siebte Gummibärchen in einer Reihe, die gezählt wird; also das *eine* Bärchen, auf das ich zeige, wenn ich die Bärchen der Reihe nach abzähle (vgl. Abb. 1).

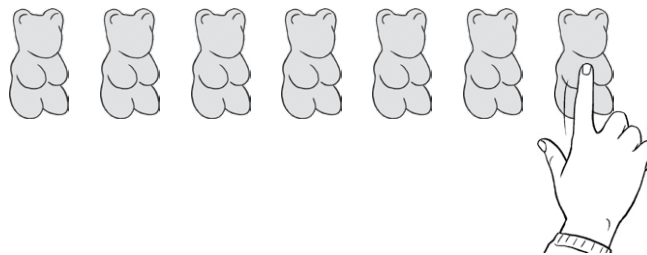


Abb. 1

In dem sehr lesenswerten Handbuch von Benz, Peter-Koop und Grüßing (2014, S. 117) findet man das Beispiel der fünfjährigen Lisa, die zunächst durch korrektes Abzählen feststellt, dass sie sieben Gummibärchen vor sich hat. Sie isst dann davon eines (nicht das siebente) und erklärt auf Nachfrage, dass sie weiterhin sieben Gummibärchen habe. Dabei zeigt sie auf das zuvor als „sieben“ gezählte *eine* Bärchen, das tatsächlich noch an seinem Platz liegt.

Lisa zeigt hier deutlich, dass sie „sieben“ nicht als *Anzahl*, also nicht als *Gesamtheit* der zuvor abgezählten Objekte versteht. Das wäre aber die Voraussetzung dafür, um im nächsten Schritt zu verstehen, dass die Zahl Sieben aus den Zahlen Sechs und Eins zusammengesetzt ist (weshalb sechs Bärchen übrig bleiben, wenn von sieben Bärchen eines gegessen wird).



**Entscheidend für das Verständnis der Addition und Subtraktion: Zahlen als *Zusammensetzungen* aus anderen Zahlen denken.**

Auch dafür ein konkretes Beispiel. Im Verlauf eines Interviews frage ich den siebenjährigen Aaron, ob er weiß, wie viel *sieben minus fünf* sei. Aaron denkt kurz nach und sagt dann sehr bestimmt: *Zwei!* Auf meine Nachfrage, wie er das herausgefunden habe, erklärt er: *Weil in sieben steckt eine Fünf und eine Zwei drinnen* (vgl. Abb. 2).

<sup>1</sup> Als *natürliche Zahlen* bezeichnet man die Zahlen Eins, Zwei, Drei und so weiter, also Zahlen, die man verwenden kann, um Objekte zu zählen. Die Zahl Null ist dabei ein Sonderfall und in diesem Buch daher wiederholt Thema, denn Sonderfälle bereiten beim Lernen in der Regel besondere Probleme. Neben den *natürlichen* gibt es unter anderem die *rationalen Zahlen*, zu denen Brüche und Dezimalzahlen gehören. Beide werden schon in der Grundschule und daher auch (kurz) in diesem Buch behandelt.

### Frühe Warnsignale im Umgang mit zweistelligen Zahlen

- zumeist deutlich verlangsamtes Lernen der Zahlwortreihe bis hundert bzw. hartnäckige Probleme beim Zählen, insbesondere an Stellenübergängen (*Was kommt nach neunundsechzig?*) und beim Rückwärtszählen (*Was kommt vor achtzig?*)
- mitunter hartnäckige Probleme beim Lesen und Schreiben von zweistelligen Zahlen (z. B. 34 wird als *dreiundvierzig* gelesen, das gehörte *achtundvierzig* als 84 geschrieben)
- zählendes Rechnen in Einerschritten selbst bei Aufgaben wie  $35 + 10$  oder  $35 - 10$ , bei denen es genügen würde, die Zehnerstelle um eins zu erhöhen bzw. zu verringern
- Stellenwertfehler beim Addieren und Subtrahieren (z. B.  $34 + 5 = 84$ )
- Schwierigkeiten und häufige Rechenfehler insbesondere bei Aufgaben, die ein Bündeln oder Entbündeln erfordern, also z. B.  $45 + 7$ ,  $80 - 7$ , Halbieren von 70 oder 90
- Fehler beim Subtrahieren zweier zweistelligen Zahlen vom Typ  $72 - 26 = 54$  (gedacht wird *vorne minus vorne, hinten minus hinten*; weil aber  $2 - 6$  nicht geht, wird  $6 - 2$  gerechnet)
- Rechenfehler, die dem Kind nicht auffallen, obwohl das Ergebnis überdeutlich vom richtigen abweicht oder gänzlich unmöglich ist; so könnte ein Kind als Ergebnis einer Subtraktion eine Zahl ermitteln, die größer ist als die Zahl, von der etwas weggenommen wurde.

Fehler und Schwierigkeiten dieser Art können darauf hinweisen, dass ein Kind zweistellige Zahlen *nicht* im Sinne der oben erläuterten Prinzipien des dezimalen Stellenwertsystems versteht, also nicht als Zusammensetzungen aus einer gewissen Anzahl von Zehnern und Einern. 35 zum Beispiel wird nicht als drei Zehner und fünf Einer oder 30 und 5 gedacht, sondern mehr oder weniger als ein *Nebeneinander zweier (einstelliger) Zahlen*: als eine 3, gefolgt von einer 5. Drei- und mehrstellige Zahlen sind in der Verlängerung dann nichts anderes als „aneinandergekettete einstellige Zahlen“ (Fuson et al., 1997). Wofür dabei die einzelnen Ziffern stehen, spielt in dieser Art zu denken keine Rolle. Wichtig ist dem Kind vielmehr, *Regeln* zu beachten, die es für den Umgang mit solchen Zeichenfolgen gibt.

Reines Regelwissen kann tatsächlich ausreichen, um eine ganze Menge von Aufgaben mit zwei- und mehrstelligen Zahlen zu lösen – auch darin zeigt sich die Genialität des Dezimalsystems. Auf Basis dieser Schreibweise kann das Rechnen mit noch so großen Zahlen in ein Abarbeiten von Regelfolgen überführt werden. Wenn solche Regeln aber nicht mit Einsicht in Prinzipien des Dezimalsystems verknüpft sind, bleiben sie isoliert und müssen jeweils für sich gemerkt werden. Daraus folgen Verwechslungen oder falsche Verallgemeinerungen. Was durchgehend ausbleibt, ist die Entwicklung eines differenzierten quantitativen Denkens, in dem Zahlen in Beziehungen zueinander gesetzt werden wie etwa *ungefähr so viel wie*, *(fast) doppelt so viel wie*, *etwas weniger als die Hälfte von* und Ähnlichem.

Die Schwierigkeiten, die mit der hier skizzierten Art des Denkens über zwei- und mehrstellige Zahlen im Laufe der Grundschule und darüber hinaus verbunden sind, werden in den Kapiteln 5.2 bis 5.4 im Detail erläutert. Kapitel 8 beschreibt Maßnahmen zur Vermeidung und Überwindung solcher Schwierigkeiten.

Was bei der ersten Aufgabe passieren kann, hat Lisas Beispiel schon deutlich gemacht. Sollte das passieren, kann eine lernförderliche Reaktion darin bestehen, spielerisch zu kontern: *Wie, du sagst, es sind sieben? Warum nicht acht?* Wenn der Plan aufgeht, wird das Kind nun beweisen wollen, dass es recht hat, und dafür noch einmal nachzählen. Wenn es sich nicht verzählt, kommt es nun auf sechs. Dann kann weitergefragt werden: *Vorher waren es sieben, jetzt sind es sechs – was ist passiert?*

Solches Nachfragen kann zur Klärung beitragen, dass mit sieben eben nicht das eine Bärchen gemeint war, sondern alle, die zuvor noch da lagen. Das Wieviel wurde durch das Wegnehmen geändert, es sind jetzt *weniger* als zuvor. So gelangt das Kind vielleicht zu einer weiteren Einsicht: dass das Zahlwort sechs, das in der Reihe vor sieben kommt, für *eins weniger* steht als sieben.

Das sind komplexe Zusammenhänge. Man darf nicht erwarten, dass sich all das in kurzer Zeit klären und lernen lässt. Aber immer wieder Anlässe zu suchen und zu nutzen, um mit Kindern über das Zählen und die Bedeutung von Zahlen ins Gespräch zu kommen, ist in jedem Fall ein guter Anfang. Darum – mit Kindern ins Gespräch zu kommen – geht es auch bei der zweiten und dritten Aufgabe; dazu mehr im Folgenden.

### Eine wichtige Erkenntnis: Es ist egal, wo ich zu zählen beginne

Zahlen als Anzahlen zu erfassen, schließt den Gedanken ein, dass es beim zählenden Ermitteln der Anzahl nicht darauf ankommt, in welcher Reihenfolge die einzelnen Elemente den Zahlwörtern eins zu eins zugeordnet werden. Es ist also auch ohne Belang, ob bei einer Reihe links oder rechts zu zählen begonnen wird (siehe oben, Aufgabe 2, sowie Abb. 3).

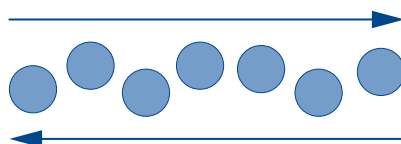


Abb. 3

Wichtig ist allein, *jeden* der zu zählenden Gegenständen *genau einem* der in korrekter Reihe aufgesagten Zahlwörter zuzuordnen.

### Die Anzahl ändert sich nicht, wenn ich die Anordnung ändere

Ebenso ist es für die Anzahl völlig egal, in welcher Anordnung die Gegenstände vorliegen. Eine Anzahl ändere ich, indem ich etwas dazugebe oder wegnehme, nicht aber durch ein noch so wildes Durcheinanderbringen der Anordnung, in der ich sie ursprünglich abgezählt habe (siehe oben, Aufgabe 3, sowie Abb. 4).

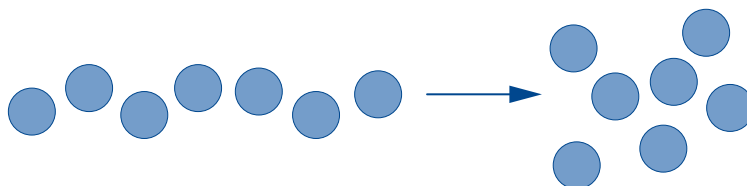


Abb. 4

Das alles sind wichtige Erkenntnisse. Viele Kinder gelangen dazu gleichsam nebenbei, ohne dass sie von Erwachsenen in Gespräche darüber verstrickt worden wären. Andere Kinder haben solche Ein-

Seien Sie nicht erstaunt, wenn Ihnen ein Kind dann sehr überzeugt (und erstaunt über die viel zu einfache Frage) mitteilt, dass die dunkelblauen *fünf* mehr sind. Vielleicht schaut Sie das Kind aber auch mit großen Augen des Unverständnisses an und weiß nicht, worauf Ihre Frage abzielt. Die dunkelblauen sind fünf, das lässt sich schnell zählen; fünf ist mehr als drei. Aber was soll das heißen: *Wie viel sind die blauen mehr?*

Beide Reaktionen sind Anzeichen dafür, dass ein Kind bislang offenbar noch nicht gelernt hat, Zahlen in dieser Weise zu vergleichen. So ist auch erklärbar, wenn ein Kind mit Fragen wie *Was ist eins mehr als fünf?* nichts anzufangen weiß, dasselbe Kind aber kein Problem mit der Frage *Was kommt beim Zählen gleich nach fünf?* hat.

Relationales Zahlverständnis hängt mit dem Teile-Ganzes-Verständnis eng zusammen. Wer die Zahl Sechs als Ganzes mit den Teilen fünf und eins denkt, muss nur den Blickwinkel ändern, um eins als *Unterschied* von fünf und sechs zu verstehen. Wenn im Denken über Zahlen hingegen das *Nacheinander* dominiert, schränkt dies die Möglichkeiten, weitergehende Beziehungen zwischen Zahlen zu erkennen und zu nutzen, erheblich ein. Deshalb sind Anzahlvergleiche ein wichtiges Thema schon in der frühen Lernbegleitung.

### Spiele, die relationales Zahlverständnis fördern

Wendeplättchen mit einer roten und einer blauen Kreisfläche sind ein Material, das im Anfangsunterricht aus guten Gründen weite Verbreitung gefunden hat. Es sollte auch in Kindergärten in großer Anzahl verfügbar sein. Bewährt haben sich Plättchen in stabiler Ausführung (in Plastik oder Holz). Eine Kiste mit 400 Stück, wie im Handel erhältlich, wird Kinder zu einer Fülle von Tätigkeiten anregen, die Ausgangspunkt für mathematische Gespräche sein können (zum mathematisch fruchtbaren Einsatz von gleichem Material in großer Menge vgl. etwa Royar & Streit, 2010).

Um Kinder beim Aufbau von relationalem Zahlverständnis zu unterstützen, könnten Sie mit solchen Plättchen folgendes Spiel anregen:

#### Wer hat mehr? (Plättchenwerfen)

Zwei Kinder bekommen einen großen Haufen Wendeplättchen (20 oder mehr; sie sollten den Haufen noch gut in beiden Händen halten können). Es können ruhig mehr Plättchen sein, als die Kinder schon abzählen können. Sie sollen ja erkennen, dass sie nicht abzählen müssen, um vergleichen zu können! Nun wählt ein Kind blau als seine Farbe, das andere rot. Eines der Kinder nimmt alle Plättchen in beide Hände und wirft sie hoch – nicht zu hoch, damit möglichst alle auf dem Tisch landen. Einige Plättchen zeigen nun die roten, andere die blaue Seite nach oben. *Von welcher Farbe sieht man mehr?* Dies wird zunächst durch Eins-zu-eins-Zuordnung ermittelt.

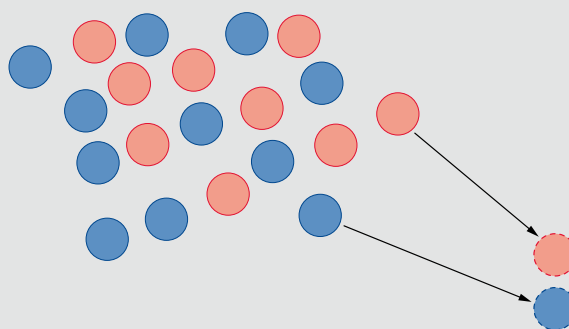


Abb. 11: Zweifarbige Plättchen nach dem Wurf. Von welcher Farbe sind es mehr? Plättchen werden 1:1 zum Vergleich angeordnet!

Nun sind verschiedene Fortsetzungen denkbar, je nachdem, wie weit die spielenden Kinder in ihrem Zahlverständnis schon sind. In der einfachsten Variante hat jenes Kind die Runde gewonnen, von dessen Farbe mehr Plättchen sind. Es darf sich als seine *Beute* jene Plättchen nehmen, die *mehr* sind, die



### Ein frühes Warnsignal: Zählendes Rechnen im Bereich der Kernaufgaben

- Ein Kind muss bei **Aufgaben +1 und -1** (z. B.  $8 + 1$ ,  $7 - 1$ ) jeweils von eins bis zur ersten Zahl zählen, um dann die Zahl vor oder nach dieser nennen zu können.
- Bei **Aufgaben 1+** (z. B.  $1 + 8$ ) vertauscht ein Kind die Zahlen nicht von sich aus. Es zählt von eins ausgehend weiter oder löst die Aufgabe durch Fingerteilzählen, also durch zählendes Ausstrecken von acht Fingern.
- Bei **Aufgaben mit der Differenz 1** (z. B.  $8 - 7$ ,  $9 - 8$ ) erkennt ein Kind nicht direkt, dass das Ergebnis eins ist, weil die Zahlen *gleich nacheinander kommen* (oder, besser noch, *sich nur um eins unterscheiden*).
- Ein Kind hat die **Zahlzerlegungen bis 5** noch nicht automatisiert, geht also zählend vor, um den zweiten Teil von 5 zu ermitteln, wenn der erste Teil z. B. mit 2 vorgegeben ist.
- Ein Kind hat die **Zahlzerlegungen mit 5** (für die Zahlen 6 bis 10) noch nicht automatisiert, geht also zählend vor, um z. B. den zweiten Teil von 8 zu ermitteln, wenn der erste Teil mit 5 vorgegeben ist.
- Ein Kind hat die **Verdoppelungsaufgaben**  $2 + 2$ ,  $3 + 3$ ,  $4 + 4$  und  $5 + 5$  noch nicht mit Verständnis automatisiert (es ermittelt das Ergebnis also zählend und/oder ist nicht in der Lage, die Bedeutung von z. B.  $3 + 3 = 6$  mit Fingern oder Zählmaterial zu verdeutlichen).
- Ein Kind hat Mitte des ersten Schuljahres die **Zerlegungen der 10** noch nicht (weitgehend) automatisiert. Es zählt also, um z. B. sagen zu können, wie viel von 3 auf 10 fehlt.

Alternativen zum zählenden Rechnen ergeben sich durch Einsicht in Beziehungen zwischen Zahlen und Aufgaben. Daran sollte ab den ersten Schulwochen gearbeitet werden. Umgekehrt ist schon Mitte des ersten Schuljahres als Warnsignal zu werten, wenn Kinder grundlegende Beziehungen nicht nutzen, um sich zählendes Rechnen zu ersparen.

### Zählendes Rechnen als Hinweis auf fehlende Einsicht in grundlegende Beziehungen

- Ein Kind zählt z. B. bei  $1 + 6$  von eins ausgehend weiter oder beginnt beim Fingerteilzählen mit einem Finger, um dann sechs einzeln zählend auszustrecken. Möglicherweise fehlt ihm die Einsicht in die Vertauschbarkeit der Summanden.
- Ein Kind hat z. B.  $3 + 3 = 6$  schon automatisiert, löst unmittelbar nach  $3 + 3$  aber  $6 - 3$  zählend. Die Umkehrbeziehung zwischen Plus und Minus scheint ihm nicht klar zu sein.
- Ein Kind hat z. B. soeben  $3 + 3 = 6$  gerechnet. Unmittelbar danach löst es  $3 + 4$  zählend. Die Nachbarschaftsbeziehung der Aufgaben  $3 + 3$  und  $3 + 4$  wird nicht genutzt.
- Ein Kind löst z. B.  $9 - 8$  durch Fingerteilzählen, indem es neun Finger ausstreckt und einzeln acht Finger umklappt. Die Nachbarschaftsbeziehung von neun und acht wird von ihm nicht genutzt, um deren Differenz zu ermitteln.



scheitert man mit manchen Kindern möglicherweise zunächst daran, dass ihnen Einsicht ins Bündelungsprinzip fehlt. Man weiß dann aber, woran man weiterarbeiten muss. Wird hingegen eines der Ergänzungsverfahren im Unterricht erarbeitet, dann ist es um vieles schwieriger, dabei Verständnis aufzubauen (näher dazu Schipper et al., 2018).

Insbesondere das sogenannte *Ergänzen mit Erweitern* wird auch von vielen Erwachsenen, die es als Kinder gelernt haben, nicht verstanden. Die meisten wenden es dennoch richtig an. Dasselbe gilt für viele Kinder. Manche verstehen das Verfahren jedoch nicht und machen damit anhaltend viele Fehler. Und solange sie es nicht verstehen, gelingt es nicht, diese Fehler in den Griff zu bekommen.

### Typische Fehler beim schriftlichen Subtrahieren im Ergänzungsverfahren

	7	2	5
-	3	7	8
	4	5	3

Gedacht und gerechnet wie folgt:  
 $5$  (an der E-Stelle)  $+ 3 = 8$ , 3 an;  
 $2 + 5 = 7$ , 5 an;  $3 + 4 = 7$ , 4 an;  
 ein sogenannter „Kippfehler“.

	7	2	5
-	3	7	8
	4	5	7

Gedacht und gerechnet wie folgt:  
 $8 + 7 = 15$ , 7 an;  $7 + 5 = 12$ , 5 an;  
 $3 + 4 = 7$ , 4 an; das Kind ergänzt zwar korrekt im Sinne des Verfahrens, erweitert aber nicht an der nächstgrößeren Stelle um 1.

	7	8	0
-	3	6	8
	4	2	0

Gedacht und gerechnet wie folgt:  
 $8 + 0 = 0$ , 0 an;  $6 + 2 = 8$ ; 2 an;  
 $3 + 4 = 7$ , 4 an. Eine der zahlreichen Varianten von Fehlern im Umgang mit Nullen.

Aufschlussreich ist, wenn Kinder (etwa bei Bearbeitung einer Textaufgabe) die Subtraktion selbst aufschreiben müssen. Manche Kinder notieren dann die kleinere Zahl oben, die größere unten und versuchen, die eingeübten, aber nicht verstandenen Regeln anzuwenden. So könnte es etwa zur nebenstehenden Aufgabe kommen, bei der gedacht und gerechnet wird wie folgt:  $8 + 3 = 11$ , 3 an, 1 weiter;  $6 + 1 = 7$ ,  $7 + 7 = 14$ , 7 an, 1 weiter;  $7 + 1 = 8$ ,  $8 + 5 = 13$ , 5 an.

	3	4	1
-	7	6	8
	5	7	3

Dass das Ergebnis größer ist als die Ausgangszahl, fällt dem Kind ebenso wenig auf wie zuvor, dass von 341 nicht 768 weggenommen werden kann. In solchen Fällen werden grundlegende Schwierigkeiten deutlich, die weit über das Unverständnis des Subtraktionsverfahrens hinausreichen.

### Schriftliche Multiplikation

Beim schriftlichen Multiplizieren mit einer einstelligen Zahl bereitet seltener das Einhalten der Rechenregeln Schwierigkeiten als vielmehr das Folgende:

- Anhaltende Defizite im Einmaleins führen einerseits zu häufigen Fehlern. Andererseits benötigen Kinder für die Lösung einer schriftlichen Multiplikation deutlich mehr Zeit als andere, wenn sie die einzelnen Einmaleinsaufgaben, die dabei gefragt sind, nur durch Hochgehen innerhalb der Reihe lösen können.
- Beim schriftlichen Multiplizieren müssen Überträge an einer Stelle zum Teilergebnis der nächsten Stelle im Kopf addiert werden. Wird dabei zählend gerechnet, erhöht das die Fehlerquote beim schriftlichen Multiplizieren weiter. Eine zusätzliche Fehlerquelle sind Unsicherheiten im

- Kombinationen aus der Würfelfünf und einem zweiten Würfelbild bis fünf (siehe Abb. 16)
- Darstellungen von bis zu zehn, in der Teilanzahlen grafisch deutlich erkennbar sind; dabei sollte es sich um Teilanzahlen handeln, die nicht fünf sind; also etwa sieben als vier und drei, acht als vier und vier (siehe Abb. 17)

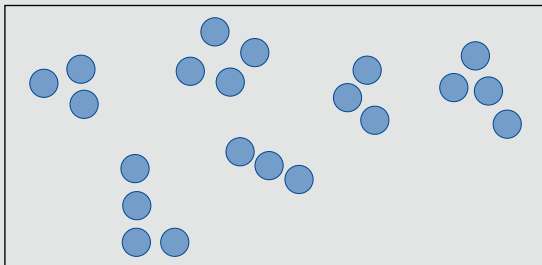


Abb. 15

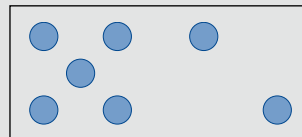


Abb. 16

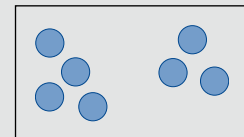


Abb. 17

### Zahlen bis 5 als eine für manche Kinder erst noch zu bewältigende Herausforderung

Wie erläutert, wird es im Unterricht mit der ganzen Klasse in der Regel sinnvoll sein, beim Arbeiten an Teile-Ganzes-Beziehungen von Anfang an alle Zahlen bis zur Zehn einzubeziehen und zumindest versuchsweise früh darüber hinauszugehen. Manche Kinder haben schon im Kindergarten kein Problem damit, zwei Würfelsechsen spontan als Zwölf zu erkennen, und bringen in die Schule noch einiges mehr an Kompetenzen mit, die sie zeigen und ausbauen wollen. Andere Kinder erkennen selbst die Würfelvier nur zählend. Die Teile-Ganzes-Beziehungen bis fünf sollten deshalb in Blitzblick-Übungen keinesfalls vernachlässigt werden.

Eine darüber hinausgehend vertiefte Beschäftigung mit den Zahlen bis fünf, die auch jene Kinder herausfordert, die die Würfelvier und Würfelfünf längst automatisiert haben, kann mit folgenden Aufgaben angeregt werden:

- Starten Sie mit der Würfeldrei. Legen Sie diese auf zwei bis drei farblich unterschiedliche Arten mit Wendplättchen nach (siehe Abb. 18). Der Auftrag dazu lautet: *Kann man die Drei noch anders mit roten und blauen Flächen darstellen? Wie viele Arten findest du?*
- Folgeaufträge: *Wie viele Arten findest du für die Würfelvier? Die Fünf? Die Sechs? Zeichne alle Varianten, die du findest, mit blauem und rotem Buntstift nach! Versuche, wirklich alle Varianten zu finden. Wie kannst du sicher sein, dass du alle gefunden hast?*

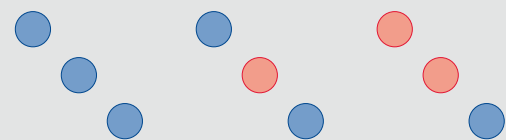


Abb. 18

Die Aufgabe ist keineswegs trivial, wobei bezüglich der möglichen Lösungen unterschieden werden muss: Wenn es nur um die jeweilige Anzahl von Plättchen mit entweder roter oder blauer Deckfläche geht, gibt es für die Drei vier Möglichkeiten (dreimal rot und keinmal blau; zweimal rot und einmal blau; einmal rot und zweimal blau; dreimal blau und keinmal rot). Für die Vier sind fünf Varianten

## Rechenrahmen

Der Rechenrahmen bietet die Möglichkeit, mehr als eine Perle mit einer gezielten Bewegung zu verschieben. Die farbliche Fünfer-Gliederung erlaubt dabei die Nutzung der Kraft der Fünf (siehe Abb. 23). Wenn aber z. B. acht als  $5 + 3$  eingestellt

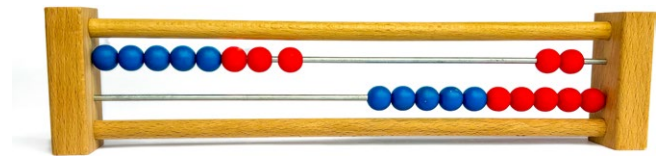


Abb. 23

wird, dann werden zur anschließenden Darstellung von  $8 - 5$  gerade *nicht* die zuvor als fünf gedachten Perlen einer Farbe weggeschoben, sondern zwei von diesen fünf und drei andersfarbige Perlen. Die *Kraft der Fünf* wird bei Darstellung derselben Aufgabe mit den Fingern durch einfaches Wegnehmen der vollen Hand deutlicher.

## Zehnerfeld und weitere Zahldarstellungen mit der Kraft der Fünf

Strukturierte Zahldarstellungen wurden oben bereits für Blitzblickübungen empfohlen. Begleitend zur Arbeit mit Fingerdarstellungen sollten diese Darstellungen erweitert werden um

- Kärtchen mit Fingerdarstellungen (vgl. Abb.24), die vielfältig für Übungen genutzt werden können (Blitzblick, Memory, Schnipp Schnapp),
- Zahldarstellungen im Zehnerfeld (vgl. Abb.25) und im (in zwei Fünfer gegliederten) Zehnerstreifen.

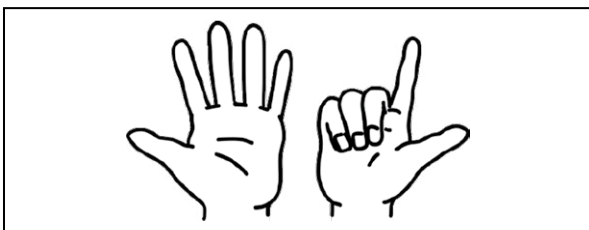


Abb. 24: Fingerdarstellung der Sieben als fünf und zwei

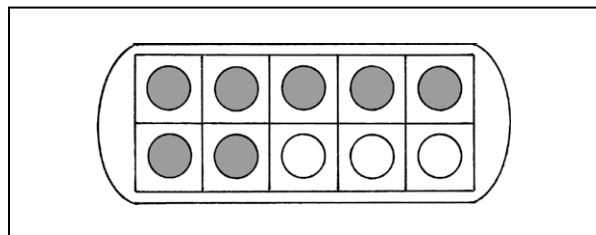


Abb. 25: Darstellung der Sieben im Zehnerfeld

Zehnerfeld und Zehnerstreifen erlauben in derselben Weise wie die Fingerdarstellungen, die Beziehungen der darin dargestellten Zahlen zur Fünf und zur Zehn zu besprechen. So lässt sich die Sieben als fünf und zwei besprechen, wobei drei Plätze des Feldes leer bleiben, usw. Zehnerfeld und Zehnerstreifen sind für den weiteren Mathematikunterricht wichtig, weil sie bis zum Hunderterfeld und darüber hinaus ausgebaut werden können. Sie sind aber für Kinder leichter zu verstehen, wenn zuvor über das intensive Arbeiten mit nicht-zählenden Fingerdarstellungen die Bedeutung der Fünf als wichtige Bezugszahl bereits geklärt worden ist.

Auf dieser Basis müssen dann vertraute Strukturen auf neue Darstellungen übertragen werden. Dazu sollten die Kinder aufgefordert werden, die statischen Darstellungen im Zehnerfeld und Zehnerstreifen zu nutzen, um über vorgestellte mögliche Handlungen zu sprechen.

Dazu ein Beispiel: Präsentieren Sie die Zehnerfelddarstellung der Acht. Ein Kind soll zunächst beschreiben, wie es die Anzahl erkennen kann, ohne zählen zu müssen. Dann soll es mögliche Handlungen unter Nutzung der erkannten Teilanzahlen beschreiben, etwa so:

- *Ich kann zu den acht noch zwei dazugeben / dazu denken, dann sind es zehn.*
- *Ich kann von den acht fünf wegnehmen / weg denken, dann bleiben drei.*

## Rechengeld

Rechengeld kann in ähnlicher Weise verwendet werden wie Systemmaterial, mit dem wichtigen Unterschied, dass das Material die Gleichheit von Zehnern und Einern nicht physisch verdeutlicht. Dass ein Zehnerschein gleich viel wert ist wie zehn Einer, ist nichts anderes als eine staatliche Festlegung. Das zu verstehen, ist schwer. Die meisten Erwachsenen fragen gar nicht nach dem Warum, wissen aber natürlich, dass es so ist. Kinder müssen das erst lernen. Wenn sie es einmal gelernt haben, ist Rechengeld ein für viele Kinder motivierendes Material. Für die Erarbeitung und Festigung von Stellenwertverständnis ist allerdings ratsam, sich auf Geld in den Einheiten Einer, Zehner und Hunderter zu beschränken.

## Hunderterfeld (Hundertpunktefeld)

Am Hunderterfeld können die Zahlen bis 100 als (Punkte-)Mengen dargestellt werden. Die Struktur des Feldes erlaubt es, sie dabei als Zusammensetzungen aus Zehnern und Einern zu erkennen. Als Zusatzmaterial bietet sich ein passend zugeschnittener Abdeckkarton an (siehe die Darstellung der Zahl 64 in Abb. 33). Wichtig ist die deutliche Abgrenzung von je fünf Punkten einer Reihe / Spalte. Nur dadurch wird die Quasi-Simultanerfassung der Anzahl von Reihen / Spalten über fünf hinaus möglich. Zehner können am Hunderterfeld unterschiedlich gesehen werden: als Reihe, als Spalte, als zwei Halbreihen / Halbspalten. Es ist wichtig, diese verschiedenen Möglichkeiten in Klassenkonferenzen mit den Kindern herauszuarbeiten. Denn darum geht es: Die Strukturen innerhalb des Hunderterfeldes müssen erarbeitet werden, sie sind für Kinder nicht ohne Weiteres ersichtlich!

## Hundertertafel

Hundertertafel ist der gebräuchliche Name für ein Quadrat aus zehnmal zehn kleineren Quadraten, in welchen die Zahlen von 1 bis 100 stehen (siehe Abb. 34). Dadurch ergibt sich ein aus didaktischer Sicht bedeutsamer Unterschied zum Hundertpunktefeld: Die Zahlen werden damit zu *Nummern* der jeweiligen Quadrate. Die Darstellung verdeutlicht also nicht das Mehr und Weniger der Zahlen. 64 z. B. wird in der Hundertertafel nicht als Zusammensetzung von sechs Zehnern und vier Einern und damit als mehr als z. B. 46 deutlich. 64 wird vielmehr ebenso als *ein* Kästchen dargestellt wie 46. Der einzige Unterschied ist die Position des Kästchens.

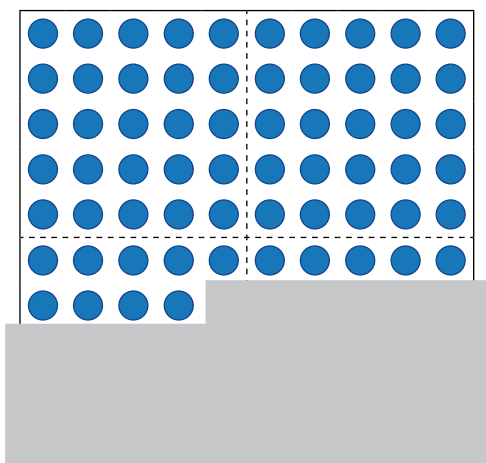


Abb. 33

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Abb. 34

### 9.3 Division

Die Division ist die Umkehroperation der Multiplikation. Für weitere Lernschritte, insbesondere für das Sachrechnen, ist es aber entscheidend, dass Kinder das Dividieren nicht *nur* als *umgedrehtes Malrechnen* einordnen. Die Gefahr, dass sie das tun, ist erfahrungsgemäß groß.



**Es ist wichtig, dass Kinder die Division als *eigenständige Rechenoperation* verstehen lernen.**

Diese hängt mit der Multiplikation zusammen, wie auch Zusammenhänge zur Subtraktion und Addition bestehen. Aber Dividieren ist für sich genommen eine weitere, vierte Variante, mit Anzahlen zu handeln bzw., auf abstrakterer Ebene, Zahlen in Beziehung zueinander zu setzen.

In diesem Sinne tragfähige Grundvorstellungen zum Dividieren aufzubauen wird dadurch erschwert, dass es zu jedem Divisionsterm zwei deutlich unterschiedliche, gleichermaßen richtige und gleich wichtige Interpretationen gibt: *Aufteilen* und *Verteilen*. Diese ähnlich lautenden Fachbegriffe sind aber für Kinder nicht hilfreich. Sie lassen sich wie folgt durch ausführlichere Umschreibungen gut ersetzen.

#### Zwei Arten des Dividierens

Dividieren heißt in jedem Fall: Eine gegebene Anzahl wird in Portionen gleicher Größe geteilt. Je nachdem, was dabei vorgegeben ist und was andererseits erst herausgefunden werden soll, hat eine Aufgabe wie z. B.  $12 : 4$  zwei verschiedene Grundbedeutungen:

- $12 : 4$  kann entweder heißen, dass alle Portionen die Größe 4 haben sollen. Mit  $12 : 4$  wird dann berechnet, wie viele Portionen dieser vorgegebenen Größe gebildet werden. Anders formuliert: Es wird berechnet, wie viele Viererportionen in 12 enthalten sind. Die Antwort lautet: Es können drei solcher Viererportionen gebildet werden. In der Fachliteratur spricht man hier von *Aufteilen*.
- $12 : 4$  kann aber ebenso bedeuten, dass 12 in vier gleich große Portionen geteilt werden soll. Es wird dann ermittelt, wie groß eine dieser gleich großen Portionen ist. Die Antwort lautet: Jede dieser vier Portionen hat die Größe 3. Der in fachdidaktischer Literatur dafür übliche Begriff lautet *Verteilen*.

Den beiden unterschiedlichen Interpretationen gemäß lässt sich  $12 : 4$  bildlich in deutlich unterschiedlicher Weise darstellen, links als Aufteilen (je 4 bilden eine Portion), rechts als Verteilen (es werden 4 Portionen gebildet):

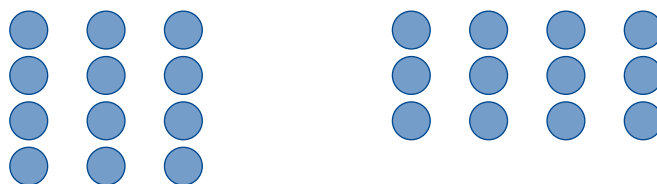


Abb. 44

# SCHOOL-SCOUT.DE

Unterrichtsmaterialien in digitaler und in gedruckter Form

## Auszug aus:

*Lernschwierigkeiten in Mathematik*

Das komplette Material finden Sie hier:

[School-Scout.de](http://School-Scout.de)

